$\boxed{1}$

(解説)

xy 平面上に 3 つの頂点がすべて有理点である正三角形 ABC が存在したと仮定する．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ d)$，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくと，a，b，c，d は有理数で，$\theta=60^\circ$ である．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であるから　$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$$

また　$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

よって　$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}|ad-bc|$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\neq 0$ より　$a^2+b^2\neq 0$ であるから　$\sqrt{3}=\frac{2|ad-bc|}{a^2+b^2}$

上式は，左辺が無理数，右辺が有理数となり矛盾．

したがって，xy 平面上で 3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しない．

$\boxed{2}$

(解説)

条件から　$a+(a+1)+\cdots\cdots+b=500$

ここで　$b=a+k$ とおくと

$$a+(a+1)+\cdots\cdots+(a+k)=(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2a)$$

であるから　$(k+1)(k+2a)=2^3\cdot5^3$

また　$k+1<k+2a$　かつ　$32\cdot33=1056>1000$ であるから　$k+1<32$

更に，$k+1$ と $k+2a$ は，同時に奇数または偶数になることはない．

以上から

[1]　$k+1=5$　　[2]　$k+1=8$　　[3]　$k+1=25$

の 3 通りについて調べればよい．

[1]　$k+1=5$ のとき　$k=4$　このとき　$2a+4=2^3\cdot5^2$

よって　$a=98$，$b=102$

[2]　$k+1=8$ のとき　$k=7$　このとき　$2a+7=5^3$

よって　$a=59$，$b=66$

[3]　$k+1=25$ のとき　$k=24$　このとき　$2a+24=2^3\cdot5$

よって　$a=8$，$b=32$

以上により，$(a,\ b)$ の組は $(8,\ 32)$，$(59,\ 66)$，$(98,\ 102)$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$a_m=[\sqrt{m}\ ]$ であるから，自然数 l に対して

$l^2\leqq m<(l+1)^2$ のとき　$a_m=l$

よって，$a_m<k\leqq a_{m+1}$ のとき，$[\sqrt{m}\ ]<k\leqq[\sqrt{m+1}\ ]$ から，$m+1=k^2$ とすると

$$[\sqrt{m}\ ]=k-1,$$
$$[\sqrt{m+1}\ ]=k$$

よって　$b_k=m=k^2-1$

(2)　数学的帰納法によって示す．

[1]　$n=1$ のとき

$$\sum_{m=1}^{1^2}a_m+\sum_{k=1}^{1}b_k=a_1+b_1=[\sqrt{1}\ ]+0=1$$

よって，成り立つ．

[2]　$n=r$ のとき成り立つと仮定すると

$$\sum_{m=1}^{r^2}a_m+\sum_{k=1}^{r}b_k=r^3$$

$n=r+1$ のとき

$$\sum_{m=1}^{(r+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{r+1}b_k=\sum_{m=1}^{r^2}a_m+\sum_{k=1}^{r}b_k+\sum_{m=r^2+1}^{(r+1)^2}a_m+b_{r+1}$$

$$=r^3+a_{r^2+1}+a_{r^2+2}+\cdots\cdots+a_{(r+1)^2-1}+a_{(r+1)^2}+(r+1)^2-1$$
$$=r^3+[\sqrt{r^2+1}\ ]+[\sqrt{r^2+2}\ ]+\cdots\cdots+[\sqrt{(r+1)^2-1}\ ]+[r+1]+r^2+2r$$
$$=r^3+\underbrace{r+r+\cdots\cdots+r}_{2r\text{ 個}}+(r+1)+r^2+2r$$
$$=r^3+2r^2+r+1+r^2+2r$$
$$=r^3+3r^2+3r+1$$
$$=(r+1)^3$$

よって，$n=r+1$ のときも成り立つ．

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して成り立つ．

(3)　(2) の結果から

$$\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}\ ]=\sum_{m=1}^{n^2}a_m=n^3-\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$$
$$=n^3-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$
$$=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$$