$\boxed{1}$

2 次関数 $y=x^2+ax-a+3$ のグラフは x 軸と共有点をもつが，直線 $y=4x-5$ とは共有点をもたない。このとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

次の 2 次不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2+(a-1)x-a>0$　　(2)　$x^2-ax-2a^2\leqq 0$

$\boxed{3}$

(1)　関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30\ (1\leqq x\leqq 5)$ の値域を求めよ。

(2)　x，y の 2 次式 $x^2-2xy+5y^2+6x-14y+5$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$\boxed{4}$

2 次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

$\boxed{5}$

$x^2+y^2=4$ のとき，x^2-y^2+4x の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{6}$

(1)　関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $|x^2+2x|=k$ の実数解の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$\boxed{7}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{8}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta-1\leqq 0$　　(2)　$2\cos\theta+1>0$　　(3)　$\tan\theta>-1$

$\boxed{10}$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos(90^\circ-\theta)\sin(180^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

(2)　$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ-\theta)$

(3)　$\cos 56^\circ\cos 124^\circ+\sin 56^\circ\cos 146^\circ$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\tan^2 130^\circ$

$\boxed{11}$

$\triangle$ABC において，外接円の半径を R とする。次のものを求めよ。

(1)　$b=4$，$B=30^\circ$，$C=105^\circ$ のとき　a と R

(2)　$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$A=60^\circ$ のとき　B と C

(3)　$c=R$，$B=20^\circ$ のとき　A

$\boxed{1}$

解答　$2 \leqq a < 2+2\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a > -1$ のとき　$x < -a,\ 1 < x$
$a = -1$ のとき　1 以外のすべての実数
$a < -1$ のとき　$x < 1,\ -a < x$
(2)　$a > 0$ のとき　$-a \leqq x \leqq 2a$,　$a = 0$ のとき　$x = 0$
$a < 0$ のとき　$2a \leqq x \leqq -a$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$-6 \leqq y \leqq 3$　(2)　$x=-2,\ y=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{4}$

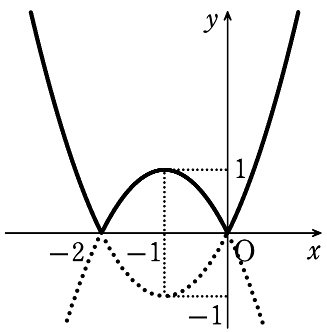
解答　(1)　$3 < m < 4$　(2)　$0 < m < 3$

$\boxed{5}$

解答　$x=2,\ y=0$ で最大値 12，$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

$\boxed{6}$

解答　(1)　〔図〕
(2)　$k<0$ のとき 0 個,
$k=0$ のとき 2 個,
$0<k<1$ のとき 4 個,
$k=1$ のとき 3 個,
$k>1$ のとき 2 個



$\boxed{7}$

解答　(1)　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$，$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

(2)　$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\theta - \dfrac{1}{\tan\theta} = -2\sqrt{3}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$(\cos\theta,\ \tan\theta) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$0° \leqq \theta \leqq 45°,\ 135° \leqq \theta \leqq 180°$　(2)　$0° \leqq \theta < 120°$
(3)　$0° \leqq \theta < 90°,\ 135° < \theta \leqq 180°$

$\boxed{10}$

解答　(1)　1　(2)　2　(3)　-1　(4)　1

$\boxed{11}$

解答　(1)　$a = 4\sqrt{2},\ R = 4$　(2)　$B = 45°,\ C = 75°$　(3)　$A = 130°$ または $A = 10°$

$\boxed{1}$

$y = x^2 + ax - a + 3$　……①，$y = 4x - 5$　……② とする。
$x^2 + ax - a + 3 = 0$ の判別式を D_1 とすると

$$D_1 = a^2 - 4(-a+3) = a^2 + 4a - 12$$

① のグラフは x 軸と共有点をもつから　$D_1 \geqq 0$
よって　$a^2 + 4a - 12 \geqq 0$　ゆえに　$(a+6)(a-2) \geqq 0$
よって　$a \leqq -6,\ 2 \leqq a$　……③
①，② から y を消去して　$x^2 + ax - a + 3 = 4x - 5$
整理すると　$x^2 + (a-4)x - a + 8 = 0$
この 2 次方程式の判別式を D_2 とすると

$$D_2 = (a-4)^2 - 4(-a+8) = a^2 - 4a - 16$$

① と ② のグラフは共有点をもたないから　$D_2 < 0$
よって　$a^2 - 4a - 16 < 0$
$a^2 - 4a - 16 = 0$ を解くと　$a = 2 \pm 2\sqrt{5}$
ゆえに，$a^2 - 4a - 16 < 0$ の解は　$2 - 2\sqrt{5} < a < 2 + 2\sqrt{5}$　……④
③，④ の共通範囲を求めて　$2 \leqq a < 2 + 2\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

(1)　左辺を因数分解すると　　$(x+a)(x-1)>0$　……①

[1]　$-a<1$ すなわち $a>-1$ のとき

①の解は　　$x<-a,\ 1<x$

[2]　$-a=1$ すなわち $a=-1$ のとき

①は $(x-1)^2>0$ となり，解は　1 以外のすべての実数。

[3]　$-a>1$ すなわち $a<-1$ のとき

①の解は　　$x<1,\ -a<x$

(2)　左辺を因数分解すると　　$(x+a)(x-2a)\leqq 0$　……①

[1]　$-a<2a$ すなわち $a>0$ のとき

①の解は　　$-a\leqq x\leqq 2a$

[2]　$-a=2a$ すなわち $a=0$ のとき

①は $x^2\leqq 0$ となり，解は　　$x=0$

[3]　$-a>2a$ すなわち $a<0$ のとき

①の解は　　$2a\leqq x\leqq -a$

$\boxed{3}$

(1)　$x^2-6x=t$ とおくと　　$t=(x-3)^2-9$　$(1\leqq x\leqq 5)$

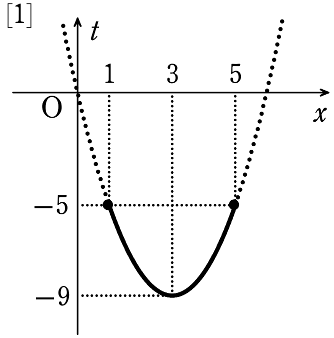
このグラフは図 [1] の実線部分となる。

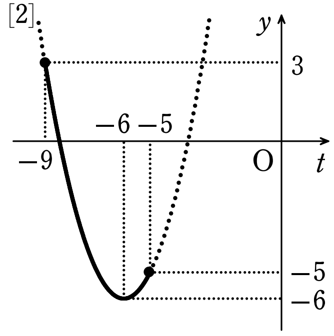
ゆえに，t の変域は　　$-9\leqq t\leqq -5$

よって　　$y=t^2+12t+30=(t+6)^2-6$　$(-9\leqq t\leqq -5)$

このグラフは図 [2] の実線部分となる。

したがって，求める値域は　　$-6\leqq y\leqq 3$





(2)　与式を x の 2 次関数とみて変形すると

与式 $=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=\{x-(y-3)\}^2-(y-3)^2+5y^2-14y+5$

$=\{x-(y-3)\}^2+4y^2-8y-4=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-8$

与式は $x=y-3$ で最小値 $4(y-1)^2-8$ をとる。

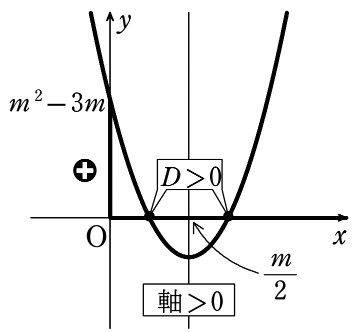
また，$4(y-1)^2-8$ は $y=1$ で最小値 -8 をとる。

よって，与式は $x=y-3$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

すなわち，$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

$\boxed{4}$

$f(x)=x^2-mx+m^2-3m$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。



(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

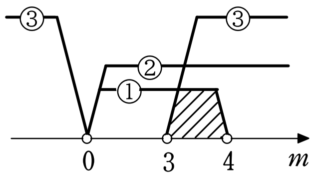
$$D=(-m)^2-4(m^2-3m)=-3m(m-4)>0$$

ゆえに　　$m(m-4)<0$

よって　　$0<m<4$　……①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\dfrac{m}{2}$ で，この軸について

$\dfrac{m}{2}>0$　　よって　　$m>0$　……②



[3]　$f(0)>0$ であるから　　$m^2-3m>0$

ゆえに　　$m(m-3)>0$

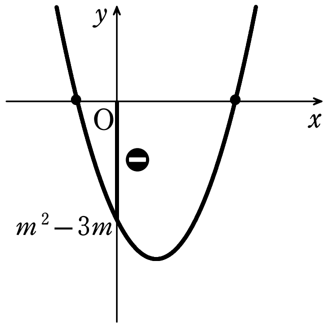
よって　　$m<0,\ 3<m$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　　$3<m<4$

(2)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，

$f(0)=m^2-3m=m(m-3)<0$ のときである。

したがって　　$0<m<3$



5

$x^2+y^2=4$ から　　$y^2=4-x^2$　……①

$y^2\geqq 0$ であるから　　$4-x^2\geqq 0$

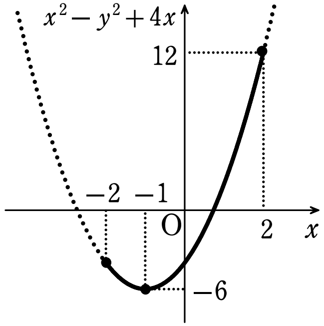
よって　　$(x+2)(x-2)\leqq 0$　　ゆえに　　$-2\leqq x\leqq 2$　……②

$$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$$
$$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$$

よって，② の範囲の x について，x^2-y^2+4x は

$x=2$　で最大値 12,

$x=-1$ で最小値 -6　をとる。



① から

$x=2$　のとき　$y^2=0$　　よって　$y=0$

$x=-1$ のとき　$y^2=3$　　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって　　$x=2,\ y=0$ で最大値 12

$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

6

(1)　$y=|x^2+2x|=|x(x+2)|$

$x(x+2)\geqq 0$ すなわち $x\leqq -2,\ 0\leqq x$ のとき

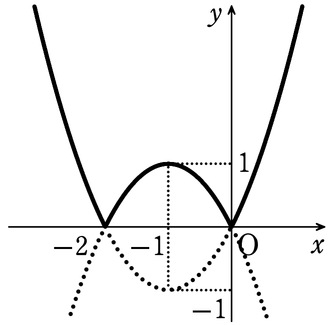
$|x^2+2x|=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$x(x+2)<0$ すなわち $-2<x<0$ のとき

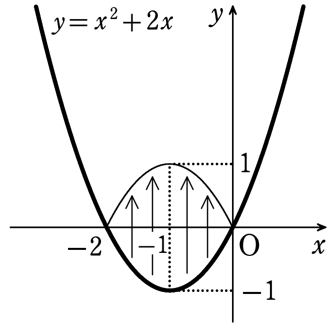
$|x^2+2x|=-(x^2+2x)$

$=-(x+1)^2+1$

よって，関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる。



別解　まず，$y=x^2+2x$ のグラフをかき，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返してもよい。



(2)　この方程式の実数解の個数は，$y=|x^2+2x|$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。よって，右の図から

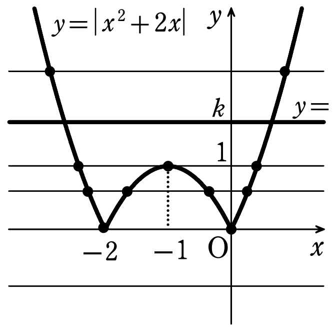
$k<0$ のとき 0 個,

$k=0$ のとき 2 個,

$0<k<1$ のとき 4 個,

$k=1$ のとき 3 個,

$k>1$ のとき 2 個



7

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$　　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$　……①

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(2)　$0°<\theta<180°$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$　……②

① から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

よって，② から　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

8

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0°\leqq\theta\leqq90°$ のとき，$\cos\theta\geqq0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$90°<\theta\leqq180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{2}>0$ より，$0°<\theta<90°$ であるから　$\cos\theta>0$

ゆえに　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

9

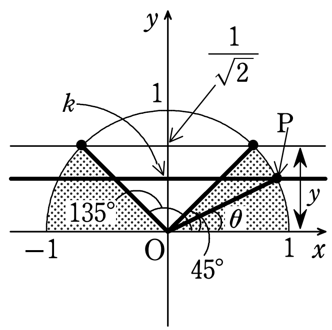
(1)　不等式は　$\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

$\theta=45°,\ 135°$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0°\leqq\theta\leqq45°,\ 135°\leqq\theta\leqq180°$



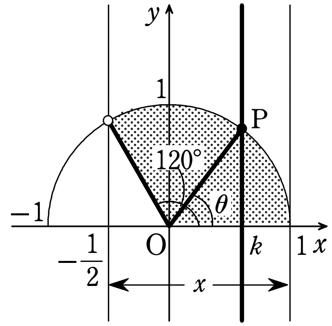
(2)　不等式は　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと

$\theta=120°$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0°\leqq\theta<120°$

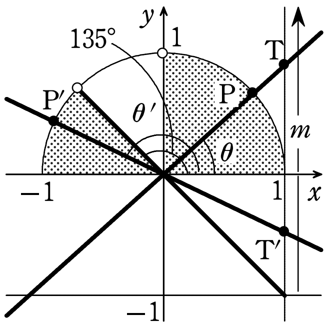


(3)　$\tan\theta=-1$ を解くと

$\theta=135^\circ$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ,\ 135^\circ < \theta \leqq 180^\circ$



$\boxed{10}$

(1)　$(\text{与式})=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2)　$(\text{与式})=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(3)　$\cos124^\circ=\cos(180^\circ-56^\circ)=-\cos56^\circ$

$\cos146^\circ=\cos(90^\circ+56^\circ)=-\sin56^\circ$

よって　$(\text{与式})=\cos56^\circ(-\cos56^\circ)+\sin56^\circ(-\sin56^\circ)$

$=-\cos^2 56^\circ-\sin^2 56^\circ$

$=-(\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ)=-1$

(4)　$\tan130^\circ=\tan(90^\circ+40^\circ)=-\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

よって　$(\text{与式})=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{1}{\tan40^\circ}\right)^2=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{\cos40^\circ}{\sin40^\circ}\right)^2$

$=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\dfrac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{1-\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=1$

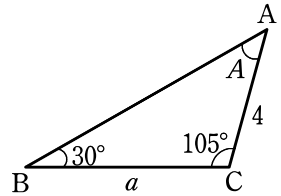
$\boxed{11}$

(1)　$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin45^\circ}=\dfrac{4}{\sin30^\circ}=2R$

よって　$a=\dfrac{4\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot2=4\sqrt{2}$

$R=\dfrac{4}{2\sin30^\circ}=4$



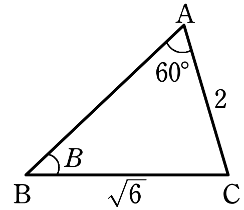
(2)　正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin60^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$

ゆえに　$\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<B<180^\circ-A$ より $0^\circ<B<120^\circ$ であるから

$B=45^\circ$

よって　$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$



(3)　正弦定理により　$\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$c=R$ から　$\sin C=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ-B$ より $0^\circ<C<160^\circ$ であるから

$C=30^\circ,\ 150^\circ$

$C=30^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(20^\circ+30^\circ)=130^\circ$

$C=150^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(20^\circ+150^\circ)=10^\circ$