1

xy 平面上の点 $(a,\ b)$ は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる．xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ．ただし，必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せずに用いてもよい．

2

正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

3

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．$a_m=[\sqrt{m}\,]$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して，数列 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots$ を

$b_1=0$,

$k \geqq 2$ のとき，$a_m<k \leqq a_{m+1}$ となる m に対して　$b_k=m$

と定める．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}\,]$ を求めよ．