$\boxed{1}$

解説

(1)　　$f(x)=|x^3-x|=|x(x+1)(x-1)|$

[1]　$x(x+1)(x-1)\geqq 0$ のとき

$-1\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$

このとき

$f(x)=x(x+1)(x-1)$

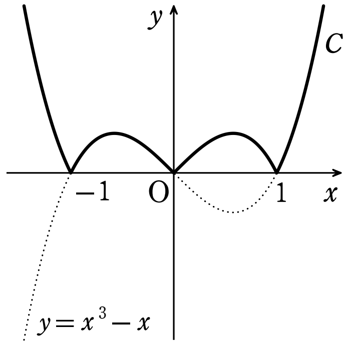
[2]　$x(x+1)(x-1)<0$ のとき

$x<-1$，$0<x<1$

このとき

$f(x)=-x(x+1)(x-1)$

[1]，[2] から，曲線 C の概形は，右の図の実線部分のようになる。

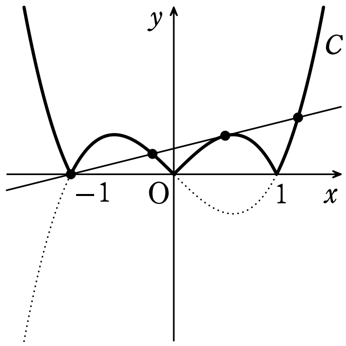


(2)　$y=g(x)$ は，点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き k の直線を表す。

C と ℓ は点 $(-1,\ 0)$ を共有する。

よって，C と ℓ がちょうど 4 つの共有点をもつのは，ℓ が C と $-1<x<0$，$0<x<1$，$1<x$ のそれぞれの部分で共有点を 1 つずつもつときである。

すなわち，ℓ が C の $0<x<1$ の部分で接するときのみである。



$y=-(x^3-x)$ より

$y'=-3x^2+1$

C 上の点 $(t,\ -t^3+t)\ (0<t<1)$ における接線の方程式は

$$y-(-t^3+t)=(-3t^2+1)(x-t)$$

すなわち　　$y=(-3t^2+1)x+2t^3$

この直線が点 $(-1,\ 0)$ を通るための条件は

$$0=(-3t^2+1)(-1)+2t^3$$

整理して　　$2t^3+3t^2-1=0$

ゆえに　　$(t+1)(2t^2+t-1)=0$

$(t+1)^2(2t-1)=0$

よって　　$t=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$0<t<1$ より　　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，接線の方程式は　　$y=\dfrac{1}{4}(x+1)$

これが ℓ の方程式と一致するから　　$k=\dfrac{1}{4}$

別解　$k(x+1)=-(x^3-x)$ が $x\neq -1$ で重解をもつための条件を求めればよい。

この方程式から

$$x(x+1)(x-1)+k(x+1)=0$$

ゆえに　$(x+1)(x^2-x+k)=0$

よって，2 次方程式 $x^2-x+k=0$　…… ① が $x\neq -1$ で重解をもてばよい。

ゆえに，① の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$D=1-4k$　　$D=0$ から　$k=\dfrac{1}{4}$

① に代入して　$x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

よって，① は $x=\dfrac{1}{2}$ で重解をもつ。

したがって　$k=\dfrac{1}{4}$

2

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s+4,\ t+1,\ -2s+t-1)$

3 点 A，B，P が一直線上にあるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

$$\begin{cases} s+4=k & \cdots\cdots ① \\ t+1=k & \cdots\cdots ② \\ -2s+t-1=-k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－② から　$s-t+3=0$

よって　$s-t=-3$　…… ①′

②＋③ から　$-2s+2t=0$

よって　$s=t$　…… ②′

①′，②′ は同時に成り立たないから，①，②，③ を同時に満たす実数 s，t，k は存在しない。

よって，3 点 A，B，P は一直線上にない。

(2)　点 H は直線 AB 上にあるから，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$$

$$u|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ であるから

$$3u-\{(s+4)+(t+1)-(-2s+t-1)\}=0$$

整理して　$u=s+2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

$=(-4,\ -1,\ 0)+(s+2,\ s+2,\ -s-2)$

$=(s-2,\ s+1,\ -s-2)$

したがって，点 H の座標は　$(s-2,\ s+1,\ -s-2)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-2,\ s-t+1,\ s-t-1)$

$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{(-2)^2+(s-t+1)^2+(s-t-1)^2}$

$=\sqrt{2(s-t)^2+6}$

$(s-t)^2 \geqq 0$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}| \geqq \sqrt{6}$

$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

$\geqq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，三角形 ABP の面積の最小値は　$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{3}$

解説

(1)　$p=\dfrac{1}{5}$ のとき　$\dfrac{1-p}{3}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{4}{15}$

時刻 2 に点 P の位置が頂点 A であるのは，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　時刻 1 での位置が頂点 A であり，そこから位置を変えない

[2]　時刻 1 での位置が頂点 A 以外であり，そこから頂点 A に移動する

$a_1=p=\dfrac{1}{5}$ であるから，[1]，[2] より

$$a_2=a_1\cdot\frac{1}{5}+(1-a_1)\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{15}=\frac{19}{75}$$

時刻 3 に点 P の位置が頂点 A であるのは，次の [3]，[4] の場合である。

[3]　時刻 2 での位置が頂点 A であり，そこから位置を変えない

[4]　時刻 2 での位置が頂点 A 以外であり，そこから頂点 A に移動する

よって，[3]，[4] より

$$a_3=a_2\cdot\frac{1}{5}+(1-a_2)\cdot\frac{4}{15}=\frac{19}{75}\cdot\frac{1}{5}+\frac{56}{75}\cdot\frac{4}{15}=\frac{281}{1125}$$

(2)　時刻 $n+1$ に点 P の位置が頂点 A であるのは，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　時刻 n での位置が頂点 A であり，そこから位置を変えない

[2]　時刻 n での位置が頂点 A 以外であり，そこから頂点 A に移動する

よって，[1]，[2] より

$$a_{n+1}=a_n\cdot p+(1-a_n)\cdot\frac{1-p}{3}=\frac{4p-1}{3}a_n+\frac{1-p}{3}\quad\cdots\cdots ①$$

(3)　① を変形して　$a_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4p-1}{3}\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $a_1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4p-1}{4}$，公比 $\dfrac{4p-1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{4}=\frac{4p-1}{4}\left(\frac{4p-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(\frac{4p-1}{3}\right)^n$$

よって　　$a_n=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4p-1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

(4)　$b_n=\dfrac{1-a_n}{3}$ より，時刻 n に点 P の位置が頂点 B，C，D である確率はいずれも b_n である。

また，点 Q は時刻 0 での位置が頂点 B であり，点 P と同様の規則に従って移動するから，時刻 n に点 Q の位置が頂点 B である確率は a_n，頂点 A，C，D である確率はいずれも b_n である。

よって，時刻 n に点 P の位置と点 Q の位置がどちらも

頂点 A である確率は　$a_n\cdot b_n=a_nb_n$,

頂点 B である確率は　$b_n\cdot a_n=a_nb_n$,

頂点 C である確率は　$b_n\cdot b_n={b_n}^2$,

頂点 D である確率は　$b_n\cdot b_n={b_n}^2$

したがって，時刻 n に点 P の位置と点 Q の位置が同じである確率 x_n は

$$x_n=a_nb_n+a_nb_n+{b_n}^2+{b_n}^2=2b_n(a_n+b_n)$$

$a_n=1-3b_n$ であるから　　$x_n=2b_n(1-3b_n+b_n)=2b_n(1-2b_n)$