1

(解説)

方程式の 2 つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とすると　$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b$

これを (B) の条件式に代入して　$-3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta \leqq 0$

よって　$(2\alpha-3)(2\beta-3) \leqq 9$ …… ①

① を満たす整数 (α, β) の組は $\alpha \geqq 2, \beta \geqq 2, \alpha \leqq \beta$ であるから

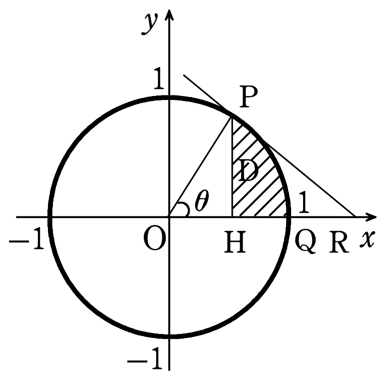
$$(\alpha, \beta)=(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3)$$

したがって，求める整数 (a, b) の組は

$$(a, b)=(-4, 4), (-5, 6), (-6, 8), (-7, 10), (-8, 12), (-6, 9)$$

2

(解説)



(1)　$\mathrm{PR}=\tan\theta$ であるから $S_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

また　$S_2=$扇形 OPQ の面積$-\triangle$OPH の面積

$$=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

$$=\cos\theta\left(\frac{\theta}{\sin\theta}-\cos\theta\right)$$

ところで　$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\cos\theta=1, \lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$ であるから

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{\theta\to0}\cos\theta\left(\frac{\theta}{\sin\theta}-\cos\theta\right)=0$$

(2)　OR 軸を x 軸にして，図のように座標をとると，V_1 は $\triangle$OPH を x 軸の周りに回転した円すいと，$\triangle$RPH を x 軸の周りに回転した円すいの体積の和であるから

$$V_1=\frac{\pi}{3}\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{OR}=\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

また　$\displaystyle V_2=\pi\int_{\cos\theta}^{1}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\cos\theta}^{1}=\frac{\pi}{3}(2-3\cos\theta+\cos^3\theta)$

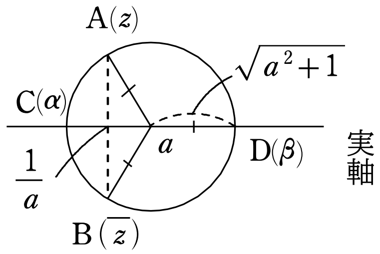
$$=\frac{\pi}{3}(1-\cos\theta)^2(2+\cos\theta)$$

ゆえに　$\dfrac{V_2}{\theta^2V_1}=\dfrac{\cos\theta(1-\cos\theta)^2(2+\cos\theta)}{\theta^2\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta(2+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)^2}$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{V_2}{\theta^2V_1}=\lim_{\theta\to0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{\cos\theta(2+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}\right\}=\frac{3}{4}$

3

解説



$ax^2-2x+a=0$ …… ①

$x^2-2ax+1=0$ …… ②

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$a>1$ から $\dfrac{D_1}{4}=1-a^2<0$, $\dfrac{D_2}{4}=a^2-1>0$

よって，② の 2 つの実数解を表す点を $\mathrm{C}(\alpha)$, $\mathrm{D}(\beta)$ とすると，点 C, D は実軸上にあって，

線分 CD の中点は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$ から点 a である．また ① の解は共役な複素数で

あるから，これらを z, $\overline{z}$ とし，$\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(\overline{z})$ とすると $z+\overline{z}=\dfrac{2}{a}$，$z\overline{z}=|z|^2=1$ である

から　$|z-a|^2=|\overline{z}-a|^2=(z-a)(\overline{z}-a)=z\overline{z}-a(z+\overline{z})+a^2=1-a\cdot\dfrac{2}{a}+a^2=a^2-1$

よって　$|z-a|=|\overline{z}-a|=\sqrt{a^2-1}$

また　$\mathrm{CD}^2=|\beta-\alpha|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2a)^2-4\cdot1=4(a^2-1)$

ゆえに　$\mathrm{CD}=2\sqrt{a^2-1}$　　したがって，4 点 A, B, C, D はいずれも点 a を中心とする，半径 $\sqrt{a^2-1}$ の円周上にある．