【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中２女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「２次関数」の前半
数学A「図形の性質」の後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

関数 $y=ax+b$ $(1\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 1，最小値が 0 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$

次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2+4x+1$　　(2) $y=-2x^2+4x+3$

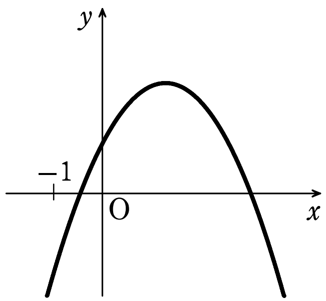
(3) $y=\dfrac{1}{3}x^2+2x$　　(4) $y=-(x-2)(2x+1)$

$\boxed{3}$

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図で与えられるとき，次の値の符号をいえ。

(1) a　　(2) b　　(3) c

(4) $a-b+c$



$\boxed{4}$

放物線 $y=x^2-3x+2$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=x^2+x+1$ に重なるか。

$\boxed{5}$

ある放物線を y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+16x-29$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=2x^2+3x+1$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}\right)$　　(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ $(1\leqq x\leqq 5)$

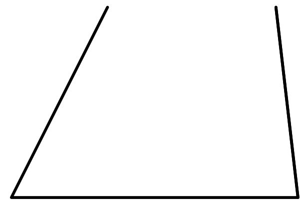
$\boxed{7}$

長さ 1 の線分 AB が与えられたとき，次の線分を作図せよ。

(1) 長さ $\dfrac{5}{4}$ の線分　　(2) 長さ $\sqrt{7}$ の線分

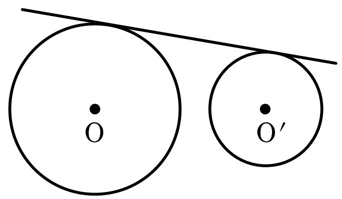
$\boxed{8}$

右の図のように 3 つの線分が与えられている。これらの線分すべてに接する円を作図せよ。



$\boxed{9}$

右の図のように，半径 r の円 O と半径 r' の円 O′ が与えられている。ただし，$r>r'$ である。
この 2 円 O，O′ に図のように接する共通接線を作図する方法を述べよ。

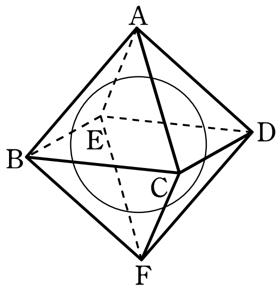


10

1 辺の長さが 7 の正八面体 ABCDEF について，次のものを求めよ。

(1)　正八面体の体積 V

(2)　正八面体に内接する球の半径 r



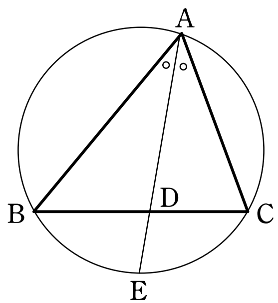
11

交わる 2 平面 α，β の交線を ℓ とする。α，β 上にない点 O から α，β に垂線を下ろし，その交点をそれぞれ A，B とする。このとき，$\ell \perp$AB であることを証明せよ。

12

△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，△ABC の外接円との交点を E とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$$



【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$ または $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$

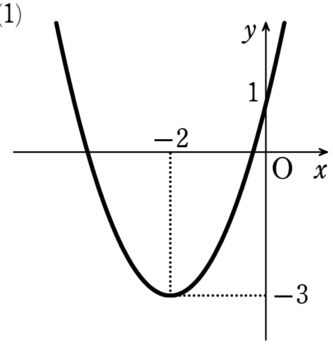
$\boxed{2}$

解答　グラフ，軸，頂点の順に

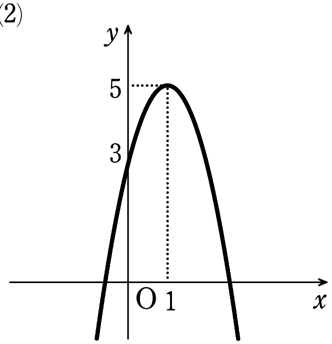
(1)　〔図〕，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -3)$　　(2)　〔図〕，直線 $x=1$，点 $(1,\ 5)$

(3)　〔図〕，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ -3)$　　(4)　〔図〕，直線 $x=\frac{3}{4}$，点 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{25}{8}\right)$

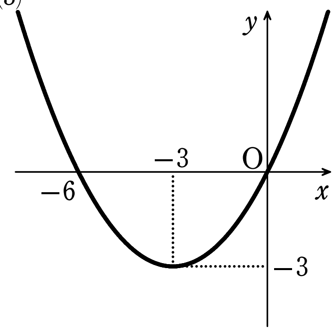
(1)



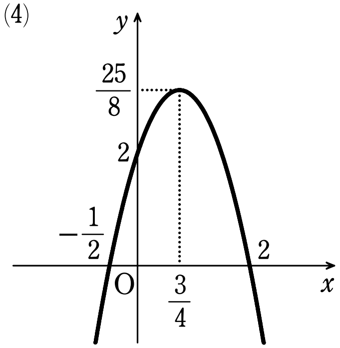
(2)



(3)



(4)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<0$　　(2)　$b>0$　　(3)　$c>0$　　(4)　$a-b+c<0$

$\boxed{4}$

解答　x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動

$\boxed{5}$

解答　$y=-2x^2-4x+3$

$\boxed{6}$

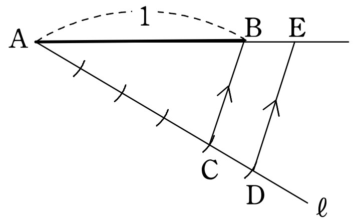
解答　(1)　$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 0，最大値はない

(2)　$x=2$ で最大値 $\frac{7}{2}$，$x=5$ で最小値 -1

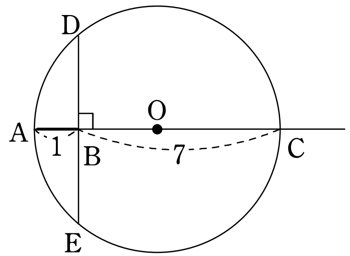
$\boxed{7}$

解答　(1)　図の線分AE　　(2)　図の線分 BD

(1)

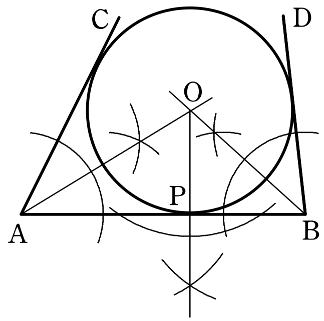


(2)



$\boxed{8}$

解答



$\boxed{9}$

解答　略

$\boxed{10}$

解答　(1)　$V=\dfrac{343\sqrt{2}}{3}$　　(2)　$r=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{11}$

解答　略

$\boxed{12}$

解答　略

$\boxed{1}$

解説

[1]　$a>0$ のとき

この関数は，x の値が増加すると y の値も増加する。

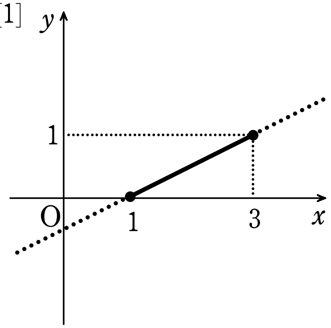
よって　　$x=1$ のとき $y=0$，　$x=3$ のとき $y=1$

ゆえに　　$a+b=0$，　$3a+b=1$

これを解いて　　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

これは $a>0$ を満たす。

[1]



[2]　$a=0$ のとき

この関数は $y=b$ $(1\leqq x\leqq 3)$ となり，条件を満たさない。

[3]　$a<0$ のとき

この関数は，x の値が増加すると y の値は減少する。

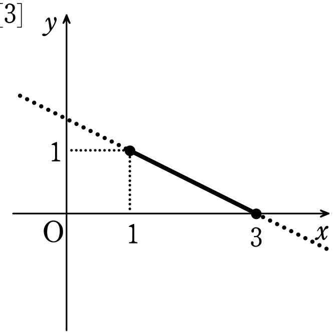
よって　　$x=1$ のとき $y=1$，　$x=3$ のとき $y=0$

ゆえに　　$a+b=1$，　$3a+b=0$

これを解いて　　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$

これは $a<0$ を満たす。

[3]



[1]～[3] から

$$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}\quad \text{または}\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$y=x^2+4x+1$

$=(x^2+4x+2^2-2^2)+1$

$=\{(x+2)^2-2^2\}+1$

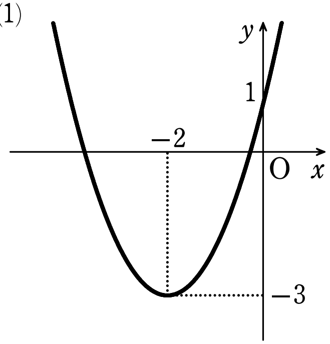
$=(x+2)^2-3$

グラフは［図］。

軸は直線 $x=-2$

頂点は点 $(-2,\ -3)$

(1)



(2)　$y=-2x^2+4x+3=-2(x^2-2x)+3$

$=-2(x^2-2x+1^2-1^2)+3$

$=-2\{(x-1)^2-1^2\}+3$

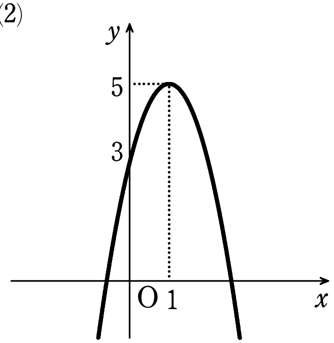
$=-2(x-1)^2+5$

よって，グラフは［図］。

軸は直線 $x=1$

頂点は点 $(1,\ 5)$

(2)



(3)　$y=\frac{1}{3}x^2+2x=\frac{1}{3}(x^2+6x)$

$=\frac{1}{3}(x^2+6x+3^2-3^2)$

$=\frac{1}{3}\{(x+3)^2-3^2\}$

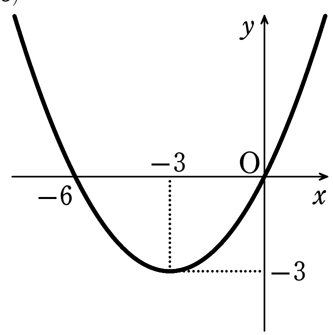
$=\frac{1}{3}(x+3)^2-3$

よって，グラフは〔図〕。

軸は直線 $x=-3$

頂点は点 $(-3,\ -3)$

(3)



(4)　$y=-(x-2)(2x+1)=-(2x^2-3x-2)$

$=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+2$

$=-2\left\{x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

$=-2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

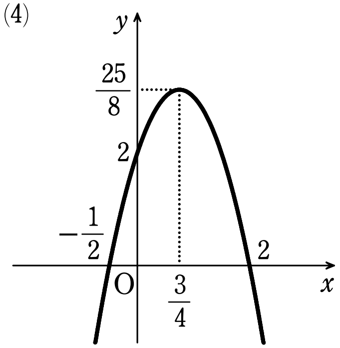
$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2\cdot\frac{9}{16}+2$

$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

よって，グラフは〔図〕。

軸は直線 $x=\frac{3}{4}$，頂点は点 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{25}{8}\right)$

(4)



$\boxed{3}$

(解説)

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$，　y 軸との交点は点 $(0,\ c)$

(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

(2)　軸は $x>0$ の範囲にあるから　$-\frac{b}{2a}>0$

ここで $a<0$ であるから　$b>0$

(3)　y 軸と正の部分で交わるから　$c>0$

(4)　$x=-1$ のとき　　$y=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c$

$x=-1$ のとき $y<0$ であるから　　$a-b+c<0$

$\boxed{4}$

(解説)

$y=x^2-3x+2$ ……①，$y=x^2+x+1$ ……②　とする。

放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると，① の頂点は ② の頂点に移る。

① を変形すると　　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

② を変形すると　　$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

よって，① の頂点の座標は　$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$

② の頂点の座標は　$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すれば，放物線 ①，② が重なるとすると

$\frac{3}{2}+p=-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}+q=\frac{3}{4}$　　　よって　　$p=-2$，$q=1$

したがって，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい。

$\boxed{5}$

(解説)

求める放物線は，放物線 $y=-2x^2+16x-29$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動し，更に y 軸に関して対称移動したものである。

まず，x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$y-2=-2\{x-(-3)\}^2+16\{x-(-3)\}-29$

よって　　$y=-2(x+3)^2+16(x+3)-27$

すなわち　　$y=-2x^2+4x+3$

次に，y 軸に関して対称移動すると

$y=-2(-x)^2+4(-x)+3$

したがって，求める放物線の方程式は　　$y=-2x^2-4x+3$

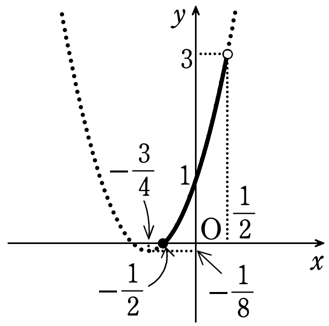
$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$y=2x^2+3x+1$

$=2\left\{x^2+\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$



また　　$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=3$

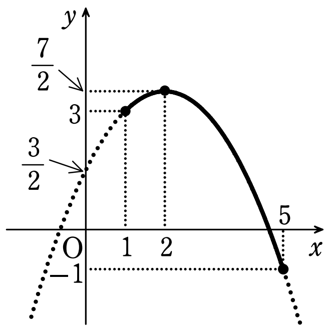
よって，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに　　$x=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 0，最大値はない。

(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2-4x+2^2)+\dfrac{1}{2}\cdot 2^2+\dfrac{3}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{7}{2}$



また　　$x=1$ のとき　　$y=3$

$x=5$ のとき　　$y=-1$

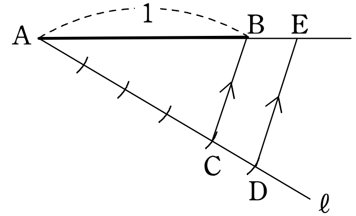
よって，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに　　$x=2$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，$x=5$ で最小値 -1

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　①　点 A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。



②　ℓ 上に AC : CD＝4 : 1 となるような点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。

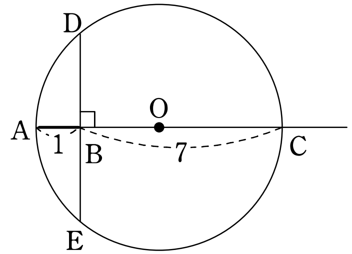
③　点 D を通り，BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。線分 AE が求める線分である。

このとき，AE＝x とすると，BC∥ED から

$1 : x=4 : 5$　　すなわち　　$x=\dfrac{5}{4}$

よって，線分 AE は長さ $\dfrac{5}{4}$ の線分である。

(2)　①　線分 AB の B を越える延長上に，BC＝7 となるような点 C をとる。



②　線分 AC を直径とする円 O をかく。

③　点 B を通り，AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により

BA・BC＝BD・BE

AB＝1，BC＝7，BD＝BE であるから　　$BD^2=7$

よって，線分 BD は長さが $\sqrt{7}$ の線分である。

8

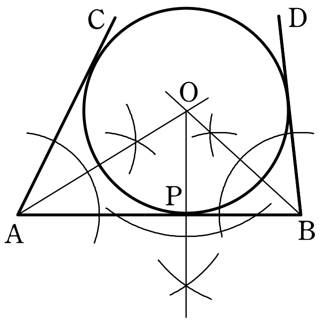
解説

右の図のように4点A，B，C，Dを定める。

① ∠CAB，∠DBAの二等分線をそれぞれ引き，その交点をOとする。

② 点Oを通り，ABに垂直な直線を引き，ABとの交点をPとする。

③ 点Oを中心として，半径OPの円をかく。



このとき，円の中心Oは3つの線分AB，AC，BDから等距離にあるから，この円は3つの線分のすべてに接する。

9

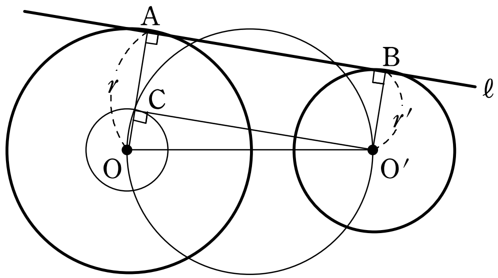
解説

① 点Oを中心として，半径$r-r'$の円をかく。

② OO′を直径とする円をかき，①の円との2つの交点のうち，OO′より上側にあるものをCとする。

③ 半直線OCと円Oとの交点をAとする。

④ 点Aを通りOAに垂直な直線ℓを引く。(ℓは円Oの接線である。)



このとき，中心O′からℓに下ろした垂線とℓとの交点をBとすると，四角形ACO′Bは長方形となるから　　O′B＝CA＝$r-(r-r')=r'$

よって，点Bは円O′上にあり，さらにO′B⊥ℓであるから，ℓは点Bで円O′にも接する。

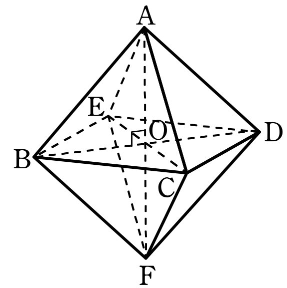
したがって，ℓが求める共通接線となる。

10

解説

(1) この正八面体を平面BCDEで切ると，2つの合同な正四角錐A－BCDE，F－BCDEに分割される。

正方形BCDEの対角線の交点をOとすると，△ABOは∠AOB＝90°の直角二等辺三角形であるから



$$AO=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

よって，正四角錐A－BCDEの体積は

$$\frac{1}{3}\times(\text{正方形 BCDE})\times AO$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 7^2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{343\sqrt{2}}{6}$$

求める正八面体の体積Vは，正四角錐A－BCDEの体積の2倍であるから

$$V=\frac{343\sqrt{2}}{6}\times 2=\frac{343\sqrt{2}}{3}$$

(2) 正八面体に内接する球の中心をOとすると，正八面体は合同な8つの四面体OABC，OACD，OADE，OAEB，OFBC，OFCD，OFDE，OFEBに分割できる。

四面体OABCの体積をV_1とすると

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7\right)\right\}\cdot r=\frac{49\sqrt{3}}{12}r$$

$V=8V_1$であるから　　$\dfrac{343\sqrt{2}}{3}=8\cdot\dfrac{49\sqrt{3}}{12}r$　　　よって　　$r=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

11

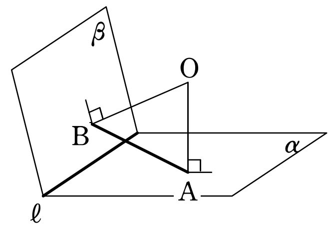
解説

OA⊥αであり，ℓはα上にあるから

OA⊥ℓ　……①

OB⊥βであり，ℓはβ上にあるから

OB⊥ℓ　……②



①，②から，ℓは平面OABに垂直である。

よって，ℓ⊥ABが成り立つ。

$\boxed{12}$

(解説)

△ABE と △ADC において

　　$\angle BAE = \angle CAD$

　　$\angle AEB = \angle ACD$

よって　△ABE∽△ADC

ゆえに　$AB : AD = AE : AC$

よって　$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

ここで，$AE = AD + DE$ であるから

　　$AB \cdot AC = AD(AD + DE)$

ゆえに　$AD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DE$　…… ①

方べきの定理により　$AD \cdot DE = BD \cdot CD$

① に代入して　$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$