$\boxed{1}$

原点を O とする座標空間において，A$(1,\ -4,\ 5)$，B$(1,\ 2,\ -1)$，C$(2,\ 1,\ -1)$，P$(p,\ q,\ 4)$とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるとき，p と q の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ が $x=-2$ で最小となるとき，p と q の値をそれぞれ求めよ。

(3)　s と t がすべての実数を動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{3}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　n は自然数とする。不等式 $a_n>\sqrt{6}$ を証明せよ。

(3)　n は自然数とする。不等式 $a_{n+1}-\sqrt{6}<\dfrac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$ を証明せよ。

$\boxed{3}$

a，b を $0\leqq a<b\leqq 1$ を満たす実数とし，点 A，B の座標をそれぞれ$(a,\ 1-a^2)$，$(b,\ 1-b^2)$とする。また原点を O，点$(0,\ 1-a^2)$，$(a,\ 1-b^2)$，$(a,\ 0)$，$(b,\ 0)$をそれぞれ C，D，E，F とする。長方形 COEA と長方形 DEFB の面積の和を S とする。

(1)　S を a，b で表せ。

(2)　b の値を固定し，a の値のみを変化させるとき，S が最大となる a を b の式で表せ。

(3)　a，b の値をともに変化させるとき，S の最大値を M とおく。M^2 を求め，$S<\dfrac{1}{2}$ を示せ。