$\boxed{1}$

(解説)

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線の方程式は　$y=-e^{-t}(x-t)+e^t$

この直線が点 $\mathrm{P}(a,\ 3)$ を通るとすると　$3=-e^{-t}(a-t)+e^t$ から　$a=e^{2t}-3e^t+t$

ここで，$f(t)=e^{2t}-3e^t+t$ とおくと　$f'(t)=2e^{2t}-3e^t+1=(2e^t-1)(e^t-1)$,

$f(-\log 2)=-\dfrac{5}{4}-\log 2$, $f(0)=-2$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$

よって，$n(a)$ は，直線 $y=a$ と曲線 $y=f(t)$ の共有点の個数となるから

$a<-2$ のとき　$n(a)=1$，$a=-2$ のとき　$n(a)=2$,

$-2<a<-\dfrac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=3$，$a=-\dfrac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=2$,

$a>-\dfrac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=1$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\log(1+a^x)-\log 2-\dfrac{x}{2}\log a=\log(1+a^x)-\log 2a^{\frac{x}{2}}$

$1+a^x-2a^{\frac{x}{2}}=\left(a^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\geqq 0$, $e>1$ から　$\log 2+\dfrac{x}{2}\log a\leqq\log(1+a^x)$

また　$f(x)=\log 2+\dfrac{x}{2}\log a+\dfrac{x^2}{8}(\log a)^2-\log(1+a^x)$ $(x\geqq 0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2}\log a+\frac{x}{4}(\log a)^2-\frac{a^x\log a}{1+a^x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(\log a)^2-\frac{a^x(\log a)^2}{(1+a^x)^2}=\frac{(1-a^x)^2}{4(1+a^x)^2}(\log a)^2$$

$x>0$ のとき $f''(x)>0$ から，$f'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調増加.

また　$f'(0)=\dfrac{1}{2}\log a-\dfrac{1}{2}\log a=0$

よって，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$　　ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調増加.

また　$f(0)=\log 2-\log 2=0$　　よって，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって，不等式が成り立つ.

(2) $a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ から　$\log a_n=n\left\{\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right)-\log 2\right\}$

(1) で $a=3,\ x=\dfrac{1}{n}$ とすると

$$\frac{1}{2n}\log 3\leqq\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right)-\log 2\leqq\frac{1}{2n}\log 3+\frac{1}{8n^2}(\log 3)^2$$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\log 3\leqq\log a_n\leqq\dfrac{1}{2}\log 3+\dfrac{1}{8n}(\log 3)^2$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8n}(\log 3)^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{2}\log 3$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$　(答)

$\boxed{3}$

（解説）

(1)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

よって　$f(x) = 4x^3 - 3x$，$g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

(2)　$\cos 3\alpha = \cos\dfrac{3\times 360^\circ}{7} = \cos\left(360^\circ - \dfrac{3\times 360^\circ}{7}\right) = \cos\dfrac{4\times 360^\circ}{7} = \cos 4\alpha$

また，$\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ から，(1) を用いると

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

よって　$(\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1) = 0$

$0 < \cos\alpha < 1$ であるから　$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$

ゆえに，求める 1 つの 3 次式 $P(x)$ は　$P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

(3)　$0 < \cos\alpha < 1$，$P(\cos\alpha) = 0$ から，$0 < x < 1$ における $P(x)$ の増減を調べる．

$P'(x) = 24x^2 + 8x - 4$

$P'(x) = 0$，$0 < x < 1$ とすると　$x = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	1
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	7

増減表は上のようになるから $P(x) = 0$ となる x は　$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < x < 1$

よって　$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < \cos\alpha < 1$

ところで，$2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ から　$0.2 < \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < 0.3$

$P(0.3) = -1.624$，$P(0.4) = -1.448$，$P(0.5) = -1$，$P(0.6) = -0.232$，$P(0.7) = 0.904$ であるから　$0.6 < \cos\alpha < 0.7$

したがって，$\cos\alpha$ の小数第 1 位の値は　6