$\boxed{1}$

(解説)

(1)　2 枚のカードの取り出し方の総数は　${}_{2n}\mathrm{C}_2$ 通り

これらは同様に確からしい。

取り出した 2 枚のカードに書かれている数の和が偶数となるのは，2 枚とも偶数のカードを取り出すか，2 枚とも奇数のカードを取り出す場合である。

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n(n-1)}{n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2n-1}$

(2)　3 枚のカードの取り出し方の総数は　${}_{2n}\mathrm{C}_3$ 通り

これらは同様に確からしい。

[1]　$n=2$ のとき

取り出したカードに書かれている数の和が偶数となるのは，1 枚は偶数のカードを，残りの 2 枚は奇数のカードを取り出すときであり，その総数は　${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2=2$ (通り)

[2]　$n\geqq3$ のとき

取り出したカードに書かれている数の和が偶数となるのは，次の (i)，(ii) の場合である。

(i)　3 枚とも偶数のカードを取り出すとき

その取り出し方の総数は　${}_n\mathrm{C}_3$ 通り

(ii)　1 枚は偶数のカードを，残りの 2 枚は奇数のカードを取り出すとき

その取り出し方の総数は　${}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_2$ 通り

(i)，(ii) より，カードに書かれている数の和が偶数となる場合の総数は

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_2\\&=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}+n\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\end{aligned}$$

$n=2$ を代入すると　$\dfrac{2\cdot1\cdot3}{3}=2$

よって，$n=2$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より，取り出したカードに書かれている数の和が偶数となるのは

$\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{3}$ (通り)

よって，求める確率は

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{1}{2}$$

別解　取り出したカードに書かれている数の和が奇数となるのは，次の (iii)，(iv) の場合である。

(iii)　3 枚とも奇数のカードを取り出すとき

(iv)　1 枚は奇数のカードを，残りの 2 枚は偶数のカードを取り出すとき

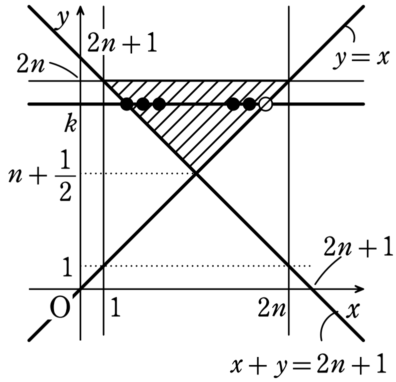
(i) ～ (iv) を合わせると全事象となる。

また，(i) と (iii) の場合の数は等しく，(ii) と (iv) の場合の数は等しいから，求める

確率は $\quad \dfrac{1}{2}$

(3) 2枚のカードに書かれている数を $x$, $y$ $(x<y)$

とおくと $\begin{cases} x+y \geqq 2n+1 \\ 1 \leqq x < y \leqq 2n \end{cases}$ ……(*)




$y=k$ $(k=n+1,\ n+2,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ のとき, (*)

を満たす $x$ の値の範囲は

$$2n-k+1 \leqq x < k$$

この不等式を満たす整数 $x$ の個数は

$$k-(2n-k+1)=2k-2n-1 \ (\text{個})$$

したがって, 取り出した2枚のカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上となる場合の総数は

$$\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-2n-1)=\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$$

よって, 求める確率は $\quad \dfrac{n^2}{n(2n-1)}=\dfrac{n}{2n-1}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=5^2-2\times1+(\sqrt{13})^2=36$

$|\overrightarrow{AB}| \geqq 0$ であるから $\quad |\overrightarrow{AB}|=6$

よって, 線分 AB の長さは $\quad 6$

(2) 直線 OH は平面 ABC に垂直であるから $\quad \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって $\quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで $\quad |\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$$=5^2-2\times1+(\sqrt{13})^2=36$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=1-(\sqrt{13})^2=-12$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=1-(\sqrt{13})^2=-12$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$=|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$=(\sqrt{13})^2-1-1+(-11)=0$$

よって $\quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$=-12+s\times36+t\times0=-12+36s$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=-12+s\times0+t\times36=-12+36t$$

ゆえに　　$-12+36s=0$，$-12+36t=0$

したがって　　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$

(3)　(2) より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから　　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=36$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\geqq 0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=6$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $S$ とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{1}{2}\times6\times6=18$$

さらに，(2) より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$=\frac{1}{9}\times36+\frac{2}{9}\times0+\frac{1}{9}\times36=8$$

$\triangle\mathrm{OAH}$ は $\angle\mathrm{OHA}=90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-8}=\sqrt{5}$$

したがって，四面体 OABC の体積は　　$\dfrac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}\times18\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

別解　(2) から，OH の長さは次のように求めてもよい。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=(\sqrt{13})^2+\frac{1}{9}\times36+\frac{1}{9}\times36+\frac{2}{3}\times(-12)+\frac{2}{3}\times(-12)+\frac{2}{9}\times0$$

$$=5$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{5}$

## 3

解説

(1)　直線 BC の傾きは

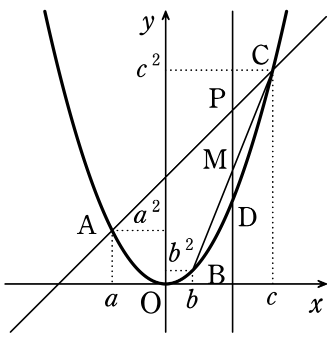
$$\frac{b^2-c^2}{b-c}=\frac{(b+c)(b-c)}{b-c}=b+c$$

また，$y=x^2$ に対して　　$y'=2x$

ゆえに，点 D の $x$ 座標を $d$ とすると，条件から

$$2d=b+c\qquad すなわち\qquad d=\frac{b+c}{2}$$

よって，点 D の座標は　　$\left(\dfrac{b+c}{2},\ \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2\right)$




また，点 M の座標は $\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{b^2+c^2}{2}\right)$ であるから，

直線 MD の方程式は　$x=\dfrac{b+c}{2}$

さらに，直線 AC の方程式は　$y-a^2=\dfrac{c^2-a^2}{c-a}(x-a)$

すなわち　$y=(c+a)(x-a)+a^2=(c+a)x-ca$

ゆえに，点 P の $y$ 座標は $(c+a)\cdot\dfrac{b+c}{2}-ca=\dfrac{ab+bc+c^2-ca}{2}$ であるから

$$\mathrm{PM}=\frac{ab+bc+c^2-ca}{2}-\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{(a-b)(b-c)}{2}$$

また　$\mathrm{MD}=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2=\dfrac{(b-c)^2}{4}$

よって，$b=\dfrac{a+c}{2}$ より $a-b=b-c=\dfrac{a-c}{2}$ であるから

$$\mathrm{PM}:\mathrm{MD}=\frac{(a-b)(b-c)}{2}:\frac{(b-c)^2}{4}=2(a-b):(b-c)=2:1$$

(2)　△BCP と △BCD の面積の比は，線分 BC と 2 点 P，D の距離の比であり，それは線分 PM，DM の長さの比に等しいから，(1) より

△BCP：△BCD＝PM：MD＝2：1

また，△ABC と △BCP の面積の比は

$$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{BCP}=(c-a):\left(c-\frac{b+c}{2}\right)=(c-a):\frac{c-a}{4}=4:1$$

よって　△ABC：△BCP：△BCD＝8：2：1

したがって，△ABC と △BCD の面積の比は

△ABC：△BCD＝8：1