【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

中２女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「数と式」の命題と証明
数学Ａ「図形の性質」の後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

1

n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^3 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

2

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

3

(1)　a，b が有理数，$\sqrt{l}$ が無理数のとき，$a+b\sqrt{l}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。

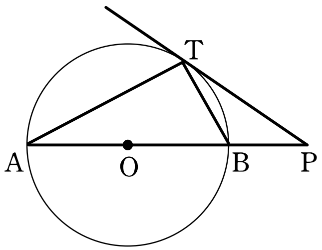
(2)　$(1+\sqrt{2})x+(-2+3\sqrt{2})y=10$ を満たす有理数 x，y の値を求めよ。

4

線分 AB を直径とする半径 1 の円 O があり，右の図のように線分 AB の延長上の点 P からこの円に接線 PT を引く。$\angle\text{BAT}=30^\circ$ であるとき

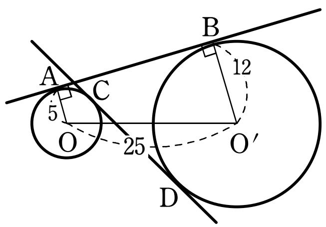
(1)　$\text{PB}=\text{BT}=1$ であることを示せ。

(2)　接線 PT の長さを求めよ。



5

右の図のように，半径 5 の円 O と半径 12 の円 O′ があり，$\text{OO}'=25$ である。このとき，共通外接線 AB の長さと共通内接線 CD の長さを求めよ。



6

直径が 2 である円 O において，1 つの直径 AB を B の方に延長して，$\text{BC}=2\text{AB}$ となる点 C をとる。また，C から円 O に接線 CT を引き，その接点を T とする。線分 CT，AT の長さを求めよ。

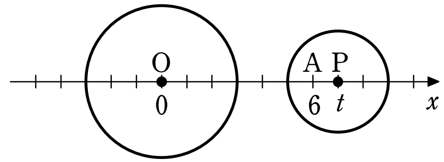
7

図のように，数直線上の原点を中心とする半径 3 の円 O と，この数直線上を動く点 P を中心とする半径 2 の円 P がある。P の座標を t とするとき，次の条件を満たす t の値，または t の値の範囲を求めよ。

(1)　2 円 O，P の共通接線が 4 本引ける。

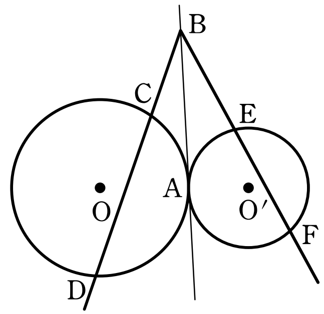
(2)　2 円 O，P の共有点が 1 個である。

(3)　2 円 O，P の共通接線が，座標が 6 である点 A を通る。



8

右の図のように，点 A で同じ直線に接する 2 円 O，O′ がある。この接線上に A と異なる点 B をとり，図のように B を通る 2 直線と円 O，O′ の交点を C，D，E，F とする。このとき，4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にあることを証明せよ。



9

$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　略

$\boxed{2}$

解答　略

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　$x=6$，$y=-2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　略　　(2)　$\sqrt{3}$

$\boxed{5}$

解答　$\mathrm{AB}=24$，$\mathrm{CD}=4\sqrt{21}$

$\boxed{6}$

解答　$\mathrm{CT}=2\sqrt{6}$，$\mathrm{AT}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$t<-5$，$5<t$　　(2)　$t=-5$，-1，1，5　　(3)　$t=2$，10

$\boxed{8}$

解答　略

$\boxed{9}$

解答　略

$\boxed{1}$

解説

対偶「n が 3 の倍数でないならば，n^3 は 3 の倍数でない」を証明する。

3 の倍数でない整数 n は，ある整数 k を用いて $3k+1$，$3k+2$ のいずれかで表される。

[1]　$n=3k+1$ のとき

$$n^3=(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1=3(9k^3+9k^2+3k)+1$$

よって，n^3 は 3 の倍数ではない。

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$n^3=(3k+2)^3=27k^3+54k^2+36k+8=3(9k^3+18k^2+12k+2)+2$$

よって，n^3 は 3 の倍数ではない。

したがって，対偶は真である。ゆえに，与えられた命題は真である。

$\boxed{2}$

解説

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数でないと仮定すると，r を有理数として，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}=r$ とおける。

両辺を 2 乗すると　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}=r^2$　　よって　$\sqrt{3}=3r^2-2$　……①

ここで，r は有理数であるから，$3r^2-2$ も有理数である。

ゆえに，① は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ は無理数である。

$\boxed{3}$

解説

(1)　$b\neq 0$ と仮定すると　$\sqrt{l}=-\dfrac{a}{b}$

a，b は有理数であるから，右辺の $-\dfrac{a}{b}$ は有理数である。

左辺の $\sqrt{l}$ は無理数であるから，これは矛盾している。

よって　$b=0$

このとき，$a+0\cdot\sqrt{l}=0$ から　$a=0$

ゆえに，a，b が有理数，$\sqrt{l}$ が無理数のとき

$$a+b\sqrt{l}=0 \text{ ならば } a=b=0$$

(2)　与式を変形して

$$(x-2y-10)+(x+3y)\sqrt{2}=0$$

x，y は有理数であるから，$x-2y-10$，$x+3y$ は有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数である。

ゆえに　$x-2y-10=0$，$x+3y=0$

よって　　$x=6$，$y=-2$

$\boxed{4}$

（解説）

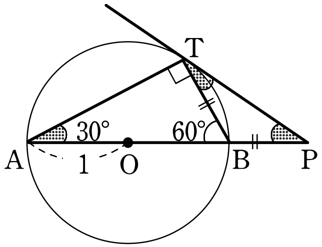
(1)　$\triangle$TAB において，$\angle \mathrm{T}=90^\circ$，$\angle \mathrm{BAT}=30^\circ$ であるから　　$\angle \mathrm{ABT}=60^\circ$，$\mathrm{BT}=1$

また　　$\angle \mathrm{BTP}=\angle \mathrm{BAT}=30^\circ$

$\angle \mathrm{BPT}=60^\circ-\angle \mathrm{BTP}=30^\circ$

ゆえに　　$\angle \mathrm{BTP}=\angle \mathrm{BPT}$

よって　　$\mathrm{PB}=\mathrm{BT}=1$



(2)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

ゆえに　　$(2+1)\cdot 1=\mathrm{PT}^2$　　　よって　　$\mathrm{PT}^2=3$

$\mathrm{PT}>0$ であるから　　$\mathrm{PT}=\sqrt{3}$

$\boxed{5}$

（解説）

（共通外接線 AB の長さ）

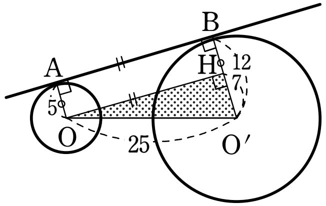
O から O′B に垂線 OH を下ろすと，$\angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{B}=90^\circ$ であるから　　$\mathrm{AB}=\mathrm{OH}$，$\mathrm{BH}=\mathrm{AO}=5$

$\triangle$OO′H において，$\angle \mathrm{H}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{OH}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{O'H}^2=25^2-(12-5)^2$$
$$=25^2-7^2=(25+7)(25-7)$$
$$=32\cdot 18=8^2\cdot 3^2$$

$\mathrm{OH}>0$ であるから　　$\mathrm{OH}=8\cdot 3=24$

したがって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{OH}=24$



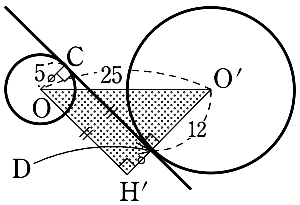
（共通内接線 CD の長さ）

O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を下ろすと，$\angle \mathrm{C}=\angle \mathrm{D}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{CD}=\mathrm{OH'},\ \mathrm{DH'}=\mathrm{CO}=5$$

$\triangle$OO′H′ において，$\angle \mathrm{H'}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{OH'}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{O'H'}^2$$
$$=25^2-(12+5)^2=25^2-17^2$$
$$=(25+17)(25-17)=42\cdot 8$$



$\mathrm{OH'}>0$ であるから　　$\mathrm{OH'}=4\sqrt{21}$

したがって　　$\mathrm{CD}=\mathrm{OH'}=4\sqrt{21}$

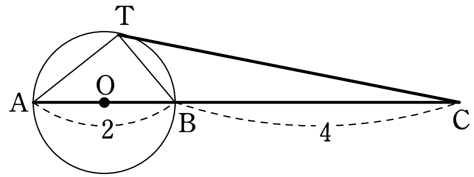
$\boxed{6}$

（解説）

方べきの定理により　　$\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{CT}^2$

$\mathrm{CB}=4$，$\mathrm{CA}=6$ であるから　　$\mathrm{CT}^2=24$

よって　　$\mathrm{CT}=2\sqrt{6}$



また，$\triangle \mathrm{ATC}\backsim\triangle \mathrm{TBC}$ であるから

$$\mathrm{AT}:\mathrm{TB}=\mathrm{TC}:\mathrm{BC}$$

ゆえに，$\mathrm{AT}:\mathrm{BT}=2\sqrt{6}:4=\sqrt{6}:2$ であり

$$\mathrm{AT}=\sqrt{6}\,k,\quad \mathrm{BT}=2k\quad (k>0)\quad \cdots\cdots ①$$

とおける 。

$\angle \mathrm{ATB}=90^\circ$ であるから　　$\mathrm{AT}^2+\mathrm{BT}^2=2^2$

この式に ① を代入して整理すると　　$10k^2=4$

ゆえに　　$k=\sqrt{\dfrac{4}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

したがって　　$\mathrm{AT}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{5}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

$\boxed{7}$

（解説）

(1)　円 P が円 O の外部にある場合である。

中心間の距離は $|t|$ であるから　　$|t|>3+2$

すなわち　　$|t|>5$　　　よって　　$t<-5$，$5<t$

(2)　2 円が外接するか，または 2 円が内接する場合である。

[1]　2 円が外接するとき　　$|t|=3+2$

よって　　$t=-5$　または　$t=5$

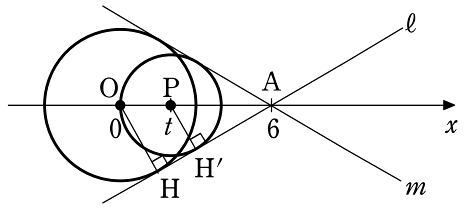
[2]　2 円が内接するとき　　$|t|=3-2$

よって　　$t=-1$　または　$t=1$

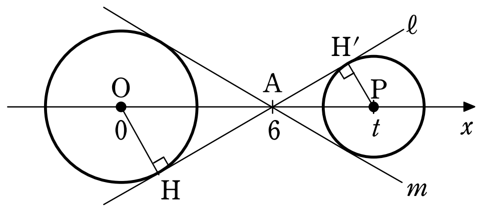
したがって　　$t=-5$，-1，1，5

(3)　次の [1] または [2] のようになる場合である。

[1]



[2]



共通接線の 1 つを ℓ とし，O，P から ℓ に下ろした垂線を，それぞれ OH，PH′ とする。

[1]，[2] のどちらの場合でも，△AOH∽△APH′，OH：PH′＝3：2 であるから

AO：AP＝3：2

AO＝6 であるから　　6：AP＝3：2　　　　よって　　AP＝4

ゆえに　　[1] のとき　$t=6-4=2$　　　[2] のとき　$t=6+4=10$

したがって　　$t=2,\ 10$

$\boxed{8}$

(解説)

円 O において，方べきの定理から　　$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BA}^2$　…… ①

円 O′ において，方べきの定理から　　$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}=\mathrm{BA}^2$　…… ②

①，② から　　　　$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にある。

$\boxed{9}$

(解説)

$\sqrt{5}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a，b を用いて　$\sqrt{5}=\dfrac{a}{b}$　と表される。

このとき　　　$a=\sqrt{5}\,b$

両辺を 2 乗すると　　$a^2=5b^2$　…… ②

よって，a^2 は 5 の倍数である。

ゆえに，(1) より a も 5 の倍数であるから，ある自然数 c を用いて

$a=5c$　…… ③　　と表される。

③ を ② に代入すると　　$25c^2=5b^2$

よって　　　$b^2=5c^2$

ゆえに，b^2 は 5 の倍数であるから，(1) より b も 5 の倍数である。

よって，a と b は公約数 5 をもつ。

このことは，a と b が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{5}$ は無理数である。