# 新年度進級試験
# 高1数学

## 範囲:　数学II　＋　数列

## （６０分）

**解答上の注意**

1　オンライン上での解答となります。各自解答ページで解答を入力してください。

2　マイナスは「m」（アルファベットの半角小文字）で入力してください。
　入力対象は「0～9」の半角数字および「m」です。

例　(1)　$12+34=\boxed{\text{アイ}}$　⇒　46　と入力

　(2)　$1-3=\boxed{\text{ウエ}}$　⇒　m2　と入力

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例　$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{\text{m4}}{5}$ として答えること。

　すなわち，「m45」と入力すること。
　また，分数は既約分数で答えること。

## $\boxed{1}$ 三角関数

$0° \leqq \theta < 180°$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば $\cos 2\theta = \boxed{ア} - \boxed{イ} t^{\boxed{ウ}}$ であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = -\boxed{エ} t^{\boxed{ウ}} + \boxed{オ} t + \boxed{カ}$$

である。したがって，$y$ の最大値は $\dfrac{\boxed{キク}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{ケ}$ である。

また，$\alpha$ が $0° < \alpha < 90°$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30°) = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}} + \sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

である。

## $\boxed{2}$ 指数対数

正の定数 $a$ に対して，方程式 $5\cdot 2^{-x}+2^{x+3}=2a$ ……① を考える。

$t=2^x$ とおくと，方程式①は $t^2-\dfrac{a}{\boxed{\text{ア}}}t+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{8}=0$ ……② となり，さらに

$\left(t-\dfrac{a}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2+\dfrac{\boxed{\text{エオ}}-a^2}{\boxed{\text{カキ}}}=0$ と変形される。

したがって，$a>\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式②は2個の解をもつ。

また，$a=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式①は，ただ1つの解

$x=\dfrac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(\log_2\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\right)$ をもつ。

## $\boxed{3}$ 図形と方程式

座標平面上で，連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ x+y \leqq 1 \\ 3x-y \leqq 3 \end{cases}$ の表す領域を $D$ とし，原点を中心とする半径 1 の円を $C$ とする。$a$ を実数とし，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$ を通り，傾きが $a$ の直線を $\ell$ とする。

$\ell$ と $D$ が共有点をもつような $a$ の最大値と最小値を求めよう。

(1) $C$ と直線 $x+y=1$ の共有点の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{ア}}\right)$，$\left(\boxed{\text{イ}},\ 0\right)$ であり，$C$ と直線 $3x-y=3$ の共有点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$，$\left(\boxed{\text{キ}},\ 0\right)$ である。

(2) $C$ と $\ell$ が接するのは，$a=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ または $a=-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであり，このときの接点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

したがって，$\ell$ と $D$ が共有点をもつような $a$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

## $\boxed{4}$ 微分・積分

放物線 $y=4x^2$ を $C_1$ とし，放物線 $y=x^2-6x+9$ を $C_2$ とする。

(1) $C_2$ は $x$ 軸と点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$ で接する。

また，$C_1$ と $C_2$ の交点の $x$ 座標は $x=\boxed{\text{イウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である。

$C_1$ の $x=0$ から $x=\boxed{\text{エ}}$ までの部分，$C_2$ の $x=\boxed{\text{エ}}$ から $x=\boxed{\text{ア}}$ までの部分および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ は $S=\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) $C_1$ 上の点 P および $C_2$ 上の点 Q の $x$ 座標をそれぞれ $a$，$b$ とする。ただし，$a>0$ とする。P における $C_1$ の接線と Q における $C_2$ の接線が平行であるとき，

$b=\boxed{\text{カ}}a+\boxed{\text{キ}}$ が成り立つ。

このとき，2 点 P，Q を通る直線 $\ell$ の方程式は $a$ を用いて

$$y=\frac{\boxed{\text{ク}}a^2}{a+\boxed{\text{ケ}}}\left(x+\boxed{\text{コ}}\right)$$ と表される。

$\ell$ は $a$ によらず定点 R$\left(\boxed{\text{サシ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ を通る。また，線分 RP と RQ の長さの比は RP：RQ＝1：$\boxed{\text{セ}}$ となり，つねに一定である。

## $\boxed{5}$ 数列

自然数の列 1，2，3，4，…… を，次のように群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{1}\ \big|\ \underset{\text{第2群}}{2,\ 3,\ 4,\ 5}\ \big|\ \underset{\text{第3群}}{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12}\ \big|\ \cdots\cdots$$

ここで，一般に第 $n$ 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 $n$ 群の最後の項を $a_n$ で表す。

(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{\text{アイ}}$ である。$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}n-\boxed{\text{エ}}$

$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ が成り立ち，$a_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

である。よって，600 は，第 $\boxed{\text{コサ}}$ 群の小さい方から $\boxed{\text{シス}}$ 番目の項である。

(2)　$n=1$，2，3，…… に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を $b_n$ で表すと

$b_n=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$ であり，$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$ が成り立つ。

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{ニ}}\,n}{\boxed{\text{ヌ}}\,n+\boxed{\text{ネ}}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ となる。