●数学Ⅱ・数学B・数学C

第1問〔1〕

MARKER

1次でない三角関数のグラフや最大・最小を考えるときには，2倍角の公式を用いて次数を下げたり，合成によりsinまたはcosにまとめることを考える。

(1) $f(0)=0^2+2\sqrt{3}\cdot0\cdot1+3\cdot1^2=\mathbf{3}$ ア

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1^2+2\sqrt{3}\cdot1\cdot0+3\cdot0^2=\mathbf{1}$ イ

(2) $f(\theta)=(1-\cos^2\theta)+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta+1$ ……ⓐ

2倍角の公式より，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$

これらをⓐに代入して

$f(\theta)=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta+2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+1$

$=\boldsymbol{\sqrt{3}\sin2\theta+\cos2\theta+2}$ ウエ

(3) $f(\theta)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)+2$

$=2\left(\sin2\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos2\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)+2$

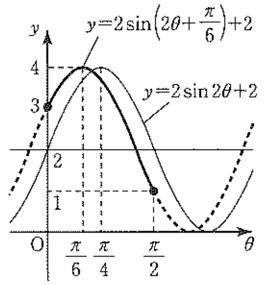
$=\boldsymbol{2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2}$ オカ ▶〈64〉

$=2\sin2\left\{\theta-\left(-\frac{\pi}{2\times6}\right)\right\}+2$

(i) このことから，$y=f(\theta)$のグラフは，$y=\sin2\theta$のグラフをy軸方向に2倍に拡大したものを，y軸の正の方向に2，θ軸の**負の方向**に $\boldsymbol{\frac{\pi}{2\times6}}$ (⑤) キ だけ平行移動したものである。

(ii) (i)より，$y=f(\theta)$のグラフは，$y=2\sin2\theta+2$のグラフをθ軸の負の方向に$\frac{\pi}{12}$だけ平行移動したものである。

したがって，定義域が$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$のときの$y=f(\theta)$のグラフは② ク



〔別解〕 (1)より，$f(0)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$であるから，

①，③は誤り。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$より，$\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$であるから

$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

したがって，$1\leqq f(\theta)\leqq4$であるから，④，⑤は誤り。

ここで，$f(\theta)=4$となるのは，$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$のとき，すなわち$\theta=\frac{\pi}{6}$のときであるから，これを満たすグラフは②である。

(iii) (1)と(3)(ii)より，$f(\theta)$は

$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ (③) ケ のとき最大値4

$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ (⑧) コ のとき最小値1をとる。

〔2〕

MARKER

整式$P(x)$を2次式ax^2+bx+cで割った余りについて考えるとき，2次方程式$ax^2+bx+c=0$が実数解をもつか，虚数解をもつかで連立方程式の立て方が異なることに注意したい。

(1) $(1+i)^2=1^2+2\cdot1\cdot i+i^2=\boldsymbol{2i}$ (⑦) サ

$(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=\boldsymbol{-2+2i}$ (⑧) シ

(2) $P(1+i)=(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c$

$=(-2+2i)+2ai+b+bi+c$

$=\boldsymbol{(b+c-2)+(2a+b+2)i}$ スセソ

$P(1+i)=1+3i$より，実部と虚部を比較して

$b+c-2=1$ ……①

$2a+b+2=3$ ……② ▶〈47〉

②より $b=-2a+1$

①より $c=-b+3=(2a-1)+3=2a+2$

したがって，$\boldsymbol{b=-2a+1}$，$\boldsymbol{c=2a+2}$ (⑥) タ

(3) $P(x)$をx^2-2x+2で割ったときの商を$Q(x)$，余りを$kx+l$とすると，

$P(x)=(x^2-2x+2)Q(x)+kx+l$

と表せる。

また，x^2-2x+2に$x=1+i$を代入すると

$(1+i)^2-2(1+i)+2=2i-(2+2i)+2=0$

であるから，

$P(1+i)=k(1+i)+l=(k+l)+ki$

$P(1+i)=1+3i$より，実部と虚部を比較して

$k+l=1$，$k=3$

したがって，$\boldsymbol{k=3}$，$\boldsymbol{l=-2}$ (③) チ

〔3〕

MARKER

誘導にしたがって丁寧に計算することが求められる。(3)のように関数の性質が成り立つかどうかは，具体的な値を代入して調べてみるとよい。

(1) $2^0=1$より

$f(0)=\frac{2^0+2^0}{2}=\mathbf{1}$ ツ，$g(0)=\frac{2^0-2^0}{2}=\mathbf{0}$ テ

$2^x>0$，$2^{-x}>0$より，相加平均と相乗平均の大小関係から

$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$ ▶〈51〉

等号成立は$2^x=2^{-x}$のとき，$(2^x)^2=1$より$2^x=1$

すなわち$\boldsymbol{x=0}$ ト のときであり，このとき$f(x)$は最小値$\mathbf{1}$ ナ をとる。

$g(x)=-2$のとき

$\frac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$

$2^x-2^{-x}+4=0$

ここで$2^x=t$とおくと

$t-\frac{1}{t}+4=0$

両辺にtをかけて

$t^2+4t-1=0$

これを解くと，$t>0$より，$t=\sqrt{5}-2$を得る。

このとき $2^x=\sqrt{5}-2$

よって $\boldsymbol{x=\log_2(\sqrt{5}-2)}$ ニヌ ▶〈69〉

(2) $f(-x)$と$g(-x)$をそれぞれ計算すると

$f(-x)=\frac{2^{-x}+2^{-(-x)}}{2}=\frac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$

$g(-x)=\frac{2^{-x}-2^x}{2}=-\frac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)$

よって，$f(-x)=\boldsymbol{f(x)}$ (⓪) ネ，$g(-x)=\boldsymbol{-g(x)}$ (③) ノ がつねに成り立つ。また，

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$

$=\frac{2\cdot2^x}{2}\cdot\frac{2\cdot2^{-x}}{2}=1$

よって，$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\mathbf{1}$ ハ がつねに成り立つ。

さらに，

$g(2x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}$

$f(x)g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x-2^{-x}}{2}=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{4}$

よって，$g(2x)=\boldsymbol{2f(x)g(x)}$ ヒ がつねに成り立つ。

(3) (A)，(C)，(D)のそれぞれに$\beta=0$を代入すると，(1)より$f(\beta)=1$，$g(\beta)=0$であることから

$f(\alpha)=g(\alpha)$ ……(A)

$g(\alpha)=f(\alpha)$ ……(C)

$g(\alpha)=-g(\alpha)$ ……(D)

となる。

(1)より，$\alpha=0$のとき$f(\alpha)=1$，$g(\alpha)=0$であることから(A)と(C)はつねに成り立つ式ではないことがわかる。

また，$g(1)=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$より，$g(1)=-g(1)$は成り立たない。よって，(D)もつねに成り立つ式ではない。

よって，(B) (①) フ 以外の三つは成り立たないことがわかる。実際，(B)について左辺を計算すると

$f(\alpha+\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-(\alpha+\beta)}}{2}=\frac{2^\alpha\cdot2^\beta+2^{-\alpha}\cdot2^{-\beta}}{2}$

一方，

$f(\alpha)f(\beta)=\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta+2^{-\beta}}{2}$

$=\frac{2^\alpha\cdot2^\beta+2^\alpha\cdot2^{-\beta}+2^{-\alpha}\cdot2^\beta+2^{-\alpha}\cdot2^{-\beta}}{4}$

$g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta-2^{-\beta}}{2}$

$=\frac{2^\alpha\cdot2^\beta-2^\alpha\cdot2^{-\beta}-2^{-\alpha}\cdot2^\beta+2^{-\alpha}\cdot2^{-\beta}}{4}$

であることから，右辺を計算すると

$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{2(2^\alpha\cdot2^\beta+2^{-\alpha}\cdot2^{-\beta})}{4}$

$=\frac{2^\alpha\cdot2^\beta+2^{-\alpha}\cdot2^{-\beta}}{2}$

よって，(B)はつねに成り立つ式であることがわかる。

第2問〔1〕

MARKER

条件を満たすx，yの組について考察する。まずは条件を不等式を用いて整理し，それらを満たす$(x,\ y)$を座標平面に図示すると視覚的にとらえることができる。なお，x, yがともに整数であるときは，いずれかの文字について候補を絞ってから数え上げるとよい。

(1) 食品Aをx袋，食品Bをy袋だけ食べるとき，

摂取するエネルギーの総量は$300x+400y$ (kcal)

摂取する塩の総量は$2x+y$ (g)

であるから，x，yが満たすべき条件は

$\boldsymbol{1200\leqq300x+400y\leqq2000}$ (⓪) ア ……①

$\boldsymbol{2x+y\leqq9}$ (⓪) イ ……②

(2) ①が成り立つことを調べるには，各辺を100で割った不等式

$12\leqq3x+4y\leqq20$ ……①'

が成り立つことを調べればよい。

⓪：$(x,\ y)=(5,\ 0)$のとき

$3x+4y=3\cdot5+4\cdot0=15$，$2x+y=2\cdot5+0=10$

よって，条件①'は満たすが，条件②は満たさない。

ゆえに正しい。

①：$(x,\ y)=(0,\ 6)$のとき

$3x+4y=3\cdot0+4\cdot6=24$，$2x+y=2\cdot0+6=6$

よって，条件①'は満たさないが，条件②は満たす。

ゆえに正しくない。

②：$(x,\ y)=(1,\ 1)$のとき

$3x+4y=3\cdot1+4\cdot1=7$，$2x+y=2\cdot1+1=3$

よって，条件①'は満たさないが，条件②は満たす。

ゆえに正しくない。

③：$(x,\ y)=(3,\ 2)$のとき

$3x+4y=3\cdot3+4\cdot2=17$，$2x+y=2\cdot3+2=8$

よって，条件①'，②ともに満たす。

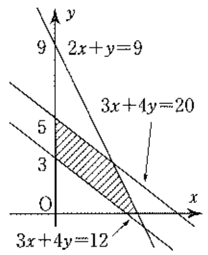
ゆえに正しくない。

④：$(x,\ y)=(2,\ 3)$のとき

$3x+4y=3\cdot2+4\cdot3=18$，$2x+y=2\cdot2+3=7$

よって，条件①′も②も満たす。
ゆえに正しい。
したがって，正しいのは⓪，④ ウエ

(3) $100x+100y=k$ とおき，k の最大値を考える。①′を変形すると



$$-\frac{3}{4}x+3\leqq y\leqq -\frac{3}{4}x+5 \quad ……①''$$

②を変形すると

$$y\leqq -2x+9 \quad ……②'$$

よって，①，②をともに満たす $(x,\ y)$ の組を座標平面に図示すると，上の図の斜線部（境界を含む）となる。

この斜線部と，直線 $y=-x+\frac{k}{100}$ が共有点をもつような k の値について考える。

x，y の取りうる値が 0 以上の実数のとき，直線 $x+y=\frac{k}{100}$ が 2 直線 $2x+y=9$，$3x+4y=20$ の交点を通るとき，k は最大となる。

この 2 直線の交点を求めると $\left(\frac{16}{5},\ \frac{13}{5}\right)$ であるから，

k の最大値は $(x,\ y)=\left(\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}\right)$ クース のとき

$100\cdot\frac{16}{5}+100\cdot\frac{13}{5}=\mathbf{580}$ オカキ である。

x，y の取りうる値が 0 以上の整数のとき，図の斜線部に含まれる，x 座標，y 座標がともに整数である点について考える。

②より $0\leqq y\leqq -2x+9$ であることから，
$0\leqq -2x+9$ が成り立つ，すなわち
$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のときについて考えればよい。

$x=0$ のとき，①″から $3\leqq y\leqq 5$
よって，$(x,\ y)=(0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 5)$
これらは②も満たす。

$x=1$ のとき，①″から $\frac{9}{4}\leqq y\leqq \frac{17}{4}$
よって，$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (1,\ 4)$
これらは②も満たす。

$x=2$ のとき，①″から $\frac{3}{2}\leqq y\leqq \frac{7}{2}$
よって，$(x,\ y)=(2,\ 2),\ (2,\ 3)$
これらは②も満たす。

$x=3$ のとき，①から $\frac{3}{4}\leqq y\leqq \frac{11}{4}$
よって，$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)$
これらは②も満たす。

$x=4$ のとき，①から $0\leqq y\leqq 2$
よって，$(x,\ y)=(4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)$
これらのうち，②も満たすのは
$(x,\ y)=(4,\ 0),\ (4,\ 1)$

したがって，条件①，②を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は **11 通り** セ ある。そのうち，$x+y$ の値が最大となるのは $(x,\ y)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$ のときであるから，k の最大値は $100\cdot(0+5)=\mathbf{500}$ タチツ である。

［2］

MARKER

$f(x)$ が整式で表されるとすると，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x=\alpha$ で接するとき，方程式 $f(x)=0$ は重解 $x=\alpha$ をもつ。すなわち，$f(x)$ を因数分解すると，$(x-\alpha)^2$ を含むことは知っておきたい。また，「導関数の値の正負」と「もとの関数の増減」の関係を理解できているか，改めて確認しておこう。

(1) 3 次関数 $y=S(x)$ のグラフが原点を通り，点 $(3,\ 0)$ で x 軸と接することから，実数 k を用いて
$S(x)=\boldsymbol{kx(x-3)^2}$ テト
と表すことができる。
さらに，$y=S(x)$ のグラフの原点における接線の傾きが 9 であるから
$S'(0)=9$
$S(x)=kx^3-6kx^2+9kx$ であるから
$S'(x)=3kx^2-12kx+9k$
よって　$S'(0)=9k=9$
$\boldsymbol{k=1}$ ナ
ゆえに　$S(x)=x(x-3)^2$
ここで，$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ であるから
$S(a)=\int_a^a f(t)\,dt=\mathbf{0}$ ニ
したがって，$a>0$ のとき
$a(a-3)^2=0$
$a=\mathbf{3}$ ヌ
$S(x)=x^3-6x^2+9x$ より
$S'(x)=3x^2-12x+9$
$=3(x-1)(x-3)$
$S'(x)=0$ のとき，$x=1,\ 3$ であるから，$S(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	**1** ネ	…	**3** ノ	…
$S'(x)$	+	0	−	0	+
$S(x)$	↗		↘		↗

ここで，$f(x)=S'(x)$ であることに注意すると，$S(x)$ の増減表から，関数 $f(x)$ は
$x<1$ の範囲では $f(x)$ の値は正
$x=1$ で **$f(x)$ の値は 0**（⓪）ハ
$1<x<3$ の範囲では $f(x)$ の値は負
$x=3$ で **$f(x)$ の値は 0**（⓪）ヒ
$3<x$ の範囲では **$f(x)$ の値は正**（①）フ である。
また，このような条件を満たすグラフは① ヘ である。

(2) $S'(x)=f(x)$ であるから，$f(x)>0$ となる x の範囲で $S(x)$ が増加し，$f(x)<0$ となる x の範囲で $S(x)$ が減少する関係になっている。 ▶〈78〉
この関係が成り立たない部分があるグラフは，**b，e**（⑤）ホ である。

第3問

MARKER

正規分布に従う確率変数を正規化する手順や，母平均の推定は基本であるからおさえておく。クッキー 20 枚を 1 箱にまとめるとき，その合計の重さは 20 倍ではなく，それぞれの質量を別の確率変数でおいて考えることに注意する。

(1) X が正規分布に従うから，$Z=\frac{X-10.2}{0.4}$ とおくと，Z は標準正規分布に従う。 ▶〈100〉

$X=10$ のとき　$Z=\frac{10-10.2}{0.4}=-0.5$

$X=10.5$ のとき　$Z=\frac{10.5-10.2}{0.4}=0.75$

よって，正規分布表より
$P(10\leqq X\leqq 10.5)=P(-0.5\leqq Z\leqq 0.75)$
$=P(-0.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.75)$
$=P(0\leqq Z\leqq 0.5)+P(0\leqq Z\leqq 0.75)$
$=0.1915+0.2734=0.4649\fallingdotseq\mathbf{0.465}$ アイウ

また，$X=9.8$ のとき，$Z=\frac{9.8-10.2}{0.4}=-1$
であるから
$P(X\leqq 9.8)=P(Z\leqq -1)=P(Z\geqq 1)$
$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587\fallingdotseq\mathbf{0.159}$ エオカ

1 個のサイコロを投げるとき，偶数の目が出る確率は
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.5$
1 個のサイコロを投げるとき，1 の目が出る確率は
$\frac{1}{6}=0.166\cdots$
2 個のサイコロを投げるとき，2 個とも偶数の目が出る確率は
$\frac{3^2}{6^2}=\frac{1}{4}=0.25$
2 個のサイコロを投げるとき，2 個とも 1 の目が出る確率は
$\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}=0.0277\cdots$
3 個のサイコロを投げるとき，3 個とも 1 の目が出る確率は
$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}=0.0046\cdots$
であるから，この中で $X\leqq 9.8$ となる確率に最も近いのは **1 個のサイコロを投げるとき，1 の目が出る確率**（①）キ である。

20 枚のクッキーの質量を表す確率変数をそれぞれ X_1，X_2，…，X_{20} とすると
$Y=(X_1+0.5)+\cdots+(X_{20}+0.5)+50$
$=X_1+X_2+\cdots+X_{20}+60$
となる。
$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_{20})=10.2$ であるから
$E(Y)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{20}+60)$
$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{20})+60$ ▶〈97〉
$=10.2\times 20+60=\mathbf{264}$ クケコ
また，
$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_{20})=0.4^2=0.16$
より
$V(Y)=V(X_1+X_2+\cdots+X_{20}+60)$
$=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_{20})$ ▶〈97〉
$=0.16\times 20=3.2$
であるから，
$\sigma=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{3.2}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{\mathbf{4\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$ サシス

(2) 標本の大きさが 100，標準偏差が 0.4 g であるから，標本平均 $\overline{X}$ に対して，これを標準化した確率変数
$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{0.4}{\sqrt{100}}}$$
が正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。
このとき
$P(-k\leqq Z\leqq k)=2\times P(0\leqq Z\leqq k)$
であるから，$P(-k\leqq Z\leqq k)=0.99$ のとき，
$P(0\leqq Z\leqq k)=0.495$
これを満たす正の値 k を正規分布表から探すと
$k=2.58$
したがって
$P(-2.58\leqq Z\leqq 2.58)\fallingdotseq 0.99$
これと $\overline{X}=10.2$ と合わせると，信頼度 99% の信頼区間は，
$$-2.58\leqq\frac{10.2-m}{\frac{0.4}{\sqrt{100}}}\leqq 2.58 \quad ▶〈101〉$$
$-2.58\cdot 0.04\leqq 10.2-m\leqq 2.58\cdot 0.04$
$-0.1032\leqq 10.2-m\leqq 0.1032$
よって　$10.0968\leqq m\leqq 10.3032$
すなわち　$\mathbf{10.10\leqq m\leqq 10.30}$ セ〜チ
信頼度が小さくなると，信頼区間の幅は狭くなるので，信頼度 95% の信頼区間は，信頼度 99% の信頼区間に対して**狭い範囲になる**。（⓪）ツ
標本の大きさが n のときの信頼度 99% の信頼区間は，
$$10.2-2.58\cdot\frac{0.4}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq 10.2+2.58\cdot\frac{0.4}{\sqrt{n}}$$
となる。信頼度を変えずにこの区間の幅を半分にするためには，$\sqrt{n}$ を 2 倍，すなわち n を 4 倍にすればよいから，標本を 100 個から **400 個** テトナ にすればよい。

また，標本の大きさを変えずに信頼区間の幅を半分にするためには，$2.58 \div 2 = 1.29$ であり，正規分布表から Z について，

$$P(0 \leqq Z \leqq 1.29) \fallingdotseq 0.4015$$

であるから，

$$P(-1.29 \leqq Z \leqq 1.29) \fallingdotseq 0.8030$$

となるので，信頼度を **80.3%** ニヌネ にすればよい。

第4問

MARKER

漸化式をもとに，誘導にしたがって数列のもつ性質について調べる問題である。等差数列や等比数列に関する基本事項をしっかり押さえておきたい。

(1) $a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0$ ……①

初項3，公差 p の等差数列 $\{a_n\}$ について

$$\boldsymbol{a_n = 3+(n-1)p}\ \text{ア} \quad \text{……②}$$ ▶〈87〉

$$a_{n+1} = 3+np \quad \text{……③}$$

初項3，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ について

$$\boldsymbol{b_n = 3 \cdot r^{n-1}}\ \text{イ}$$ ▶〈88〉

①の両辺を $b_n\ (\neq 0)$ で割ると

$$a_n \frac{b_{n+1}}{b_n} - 2a_{n+1} + 3\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから

$$ra_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$$

$$\boldsymbol{2a_{n+1} = r(a_n+3)}\ \text{ウエ} \quad \text{……④}$$

④に②と③を代入すると

$$2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\}$$

$$6+2np = 6r + npr - pr$$

$$\boldsymbol{(r-2)pn = r(p-6)+6}\ \text{オカキ} \quad \text{……⑤}$$

⑤がすべての n で成り立つとき，n についての恒等式であるから

$$(r-2)p = 0 \quad (*)$$

かつ

$$r(p-6)+6 = 0 \quad (**)$$

$p \neq 0$ より，$(*)$から $r-2=0$

すなわち　$r=2$

よって，$(**)$より

$$2(p-6)+6 = 0$$

$$\boldsymbol{p=3}\ \text{ク}$$

(2) $p=3$，$r=2$ であることから

$$a_n = 3+(n-1)\cdot 3 = 3n,\quad b_n = 3\cdot 2^{n-1}$$

よって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}n(3+3n) = \boldsymbol{\frac{3}{2}n(n+1)}\ \text{ケコサ}$$ ▶〈90〉

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = \boldsymbol{3(2^n-1)}\ \text{シス}$$

(3) $a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0$ ……⑥

を変形すると

$$(a_n+3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$$

$a_n > 0$ より，$a_n+3>0$ であるから

$$c_{n+1} = \boldsymbol{\frac{4a_{n+1}}{a_n+3}}c_n\ \text{セソ}$$

さらに，$a_{n+1} = a_n+3$ であることから

$$c_{n+1} = \frac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n = \frac{4a_{n+1}}{a_{n+1}}c_n = 4c_n$$

よって，$\{c_n\}$ は**公比が1より大きい等比数列**（②）タ である。

(4) $r = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2$，$q \neq 0$，$b_n$ が正であることから，

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad \text{……⑦}$$

を変形すると

$$q d_{n+1} b_n = d_n b_{n+1} + u b_{n+1}$$

$$d_{n+1} = \frac{(d_n+u)b_{n+1}}{q b_n} = \boldsymbol{\frac{2}{q}}(d_n+u)\ \text{チ}$$

$\{d_n\}$ が公比が0より大きく1より小さい等比数列となるための必要十分条件は

$$d_{n+1} = r' d_n \quad (0<r'<1)$$

の形で表されることであるため

$$0 < \frac{2}{q} < 1 \quad \text{かつ} \quad u = 0$$

すなわち $\boldsymbol{q>2}$ ツ かつ $\boldsymbol{u=0}$ テ となる。

第5問

MARKER

正五角形に対する考察をベクトルで行ったのち，その結果を用いて正十二面体についての考察をする。計算が煩雑になりやすいので，途中の計算は丁寧に進めていくとよいだろう。

(1) 正五角形は円に内接し，各辺に対する中心角は

$\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ であることから，円周角を考えると

$$\angle A_1C_1B_1 = \boldsymbol{36^\circ}\ \text{アイ},\quad \angle C_1A_1A_2 = 36^\circ$$

よって，錯角が等しいから，$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。また，$A_1A_2 = a$，$B_1C_1 = 1$ より

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}\overrightarrow{B_1C_1}\ \text{ウ}$$

よって

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) \quad \text{……①}$$

同様に，$\overrightarrow{OA_1} /\!/ \overrightarrow{A_2B_1}$，$\overrightarrow{OA_2} /\!/ \overrightarrow{A_1C_1}$ であることから，

$\overrightarrow{A_2B_1} = a\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1C_1} = a\overrightarrow{OA_2}$ であり

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$

$$= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2}$$

$$= \boldsymbol{(a-1)}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})\ \text{エオ} \quad \text{……②}$$

$\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} \neq \vec{0}$ なので，①と②より

$$\frac{1}{a} = a-1$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$a>0$ より，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2) 面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目すると，$\overrightarrow{A_2B_1} = a\overrightarrow{OA_1}$ より

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1}$$

また

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = |\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = a^2$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\ \text{カキク}$$

さらに

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = |\overrightarrow{OA_2}|^2 - 2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} + |\overrightarrow{OA_1}|^2$$

$$= 2 - 2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

よって

$$2 - 2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\ \text{ケコサ}$$

次に，面 $OA_2B_2C_2A_3$ において，$\overrightarrow{A_3B_2} = a\overrightarrow{OA_2}$ より

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_2} = \overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}$$

さらに

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_1$$

$$|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_3}|$$

であるため

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_1}\cdot(\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2})$$

$$= \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

$$= (1+a)\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3-5-2\sqrt{5}}{8} = \boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}}\ (⓪)\ \text{シ}$$

また

$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = (\overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1})\cdot(\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2})$$

$$= \overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a + a \times \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a^2 \times \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{0}\ (⓪)\ \text{ス}$$

最後に，面 $A_2C_1DEB_2$ において

$$\overrightarrow{B_2D} = a\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$$

となるため，4点 O，B_1，D，B_2 は同一平面上にあり，

$$OB_1 = B_1D = DB_2 = B_2O = a$$

かつ

$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = 0$$ ▶〈106〉

であることから，四角形 OB_1DB_2 は**正方形である**（⓪）セ ことがわかる。

第6問〔1〕

MARKER

ド・モアブルの定理を用いる。特に，複素数 $\cos\dfrac{\pi}{a} + i\sin\dfrac{\pi}{b}$ について，$a=b$ のときには効率的に累乗の計算ができる。また，$a \neq b$ のときにも適切な式変形により，ド・モアブルの定理を適用することができることがある。

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\alpha^2 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{2^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2^2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

よって

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boldsymbol{\cos\frac{\pi}{3}}\ \text{ア} + \boldsymbol{i\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boldsymbol{\cos\frac{2\pi}{3}}\ \text{イ} + \boldsymbol{i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

となる。

ド・モアブルの定理から

$$\alpha^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$ ▶〈123〉

ゆえに　$\alpha^6 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

これより $\alpha^n = \alpha^{n+6}$ であり，$\alpha \neq 1$ であるから，

$\alpha^n = \alpha^{n+p}$ を満たす最小の自然数 p は

$$p = \boldsymbol{6}\ \text{ウ}$$

このことを用いて

$$\alpha^{99} = \alpha^{3+16\times 6} = \alpha^3 = \cos\pi + i\sin\pi = \boldsymbol{-1}\ \text{エオ}$$

$$\alpha^{100} = \alpha^{99} \times \alpha = (-1)\times\alpha = \boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\ \text{カキク}$$

一方，

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\ \text{ケコ}\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{4}}\ \text{サ} + \boldsymbol{i\sin\frac{\pi}{4}}\right)$$

より

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{100}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$$

ド・モアブルの定理より

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100} = \cos 25\pi + i\sin 25\pi = -1$$

であるから

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{100} = \boldsymbol{-\left(\frac{3}{2}\right)^{50}}\ \text{シ〜ソ}$$

と表される。

〔2〕

MARKER

楕円の定義「2定点（2つの焦点）からの距離の和が $2a$（一定）である点の軌跡」を理解していることがポイントとなる。また，焦点が $F(-c,\ 0)$，$F'(c,\ 0)$ である楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ について，$a^2-b^2=c^2$ という関係式が成り立つこともおさえておきたい。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の焦点が $F(-c,\ 0)$，$F'(c,\ 0)$ であるとき，$a^2-b^2=c^2$ ……①
が成り立つ。
また，2つの焦点から楕円上の点までの距離の和は $2a$ で表されるため，
$t=2a+FF'$ ……②
$c=4$，$t=18$ のとき，①，②より
$$\begin{cases} a^2-b^2=16 \\ 18=2a+8 \end{cases}$$
これを解くと，$b>0$ より　$\boldsymbol{a=5}$ タ，$\boldsymbol{b=3}$ チ

(2) ②より　$\boldsymbol{t=2a+2c}$ ツテ　……②′
$a=13$，$c=12$ の楕円をかくときに必要なロープの長さは，②′より
$t=2\cdot13+2\cdot12=\boldsymbol{50}$ トナ
このとき，①より　$13^2-b^2=12^2$
$b^2=13^2-12^2=25$
$b>0$ より　$\boldsymbol{b=5}$ ニ

(3) $a=5$，$t=16$ のとき，②′より
$16=2\cdot5+2c$
よって　$\boldsymbol{c=3}$ ネ
①より　$5^2-b^2=3^2$
$b^2=5^2-3^2=16$
$b>0$ より　$\boldsymbol{b=4}$ ヌ
ロープで作られる三角形の底辺の長さは鉛筆を動かしても変化しないため，面積が最大となるのは鉛筆が y 軸上にあるとき，すなわち，底辺の長さが $2c$，高さ b の三角形となるときである。
よって，面積の最大値は
$\frac{1}{2}\times6\times4=\boldsymbol{12}$ ノハ

(4) 長さ $t=16$ のロープを用いて楕円をえがくとき，
2定点 $F(-c,\ 0)$，$F'(c,\ 0)$ について，
c の値を増加させると，②′より
$$a=\frac{1}{2}(16-2c)$$
であるから，a の値は減少する。
また，鉛筆が y 軸上にあるものとし，c の値を増加させると，ロープでできる三角形の高さは低くなる。
すなわち，b の値は減少する。
よって，**a，b の値はどちらも減少する。（②）** ヒ