STUDY COLLABO

ENGLISH PRIVATE SCHOOL
スタディ・コラボ

新年度進級試験
高2数学

範囲:数学ⅡBC

（６０分）

解答上の注意

1　オンライン上での解答となります。各自解答ページで解答を入力してください。

2　マイナスは「m」（アルファベットの半角小文字）で入力してください。
入力対象は「0～9」の半角数字および「a」および「m」です。

例　(1)　$12+34=\boxed{\text{アイ}}$　⇒　46　と入力

(2)　$1-3=\boxed{\text{ウエ}}$　⇒　m2　と入力

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例　$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{\text{m}4}{5}$ として答えること。

すなわち，「m45」と入力すること。
また，分数は既約分数で答えること。

$\boxed{1}$

$p=\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$q=\sin\left(\theta+\dfrac{4}{3}\pi\right)$ とおく。

(1)　三角関数の加法定理により，$p=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\cos\theta$ ……①，

$q=\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}\cos\theta$ ……② である。

(2)　①，② により，$pq=\sin^2\theta-\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ ……③

$=\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}\cos 2\theta-\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $pq=0$ となる θ は $\boxed{ツ}$ 個あり，そのような θ のうちで最小のものは $\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ である。

(4)　$A=\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$ とおく。$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ を求めよう。

$r=\sin\theta$ とおく。p^2+q^2 を r を用いて表すと，①，② により，

$p^2+q^2=-r^2+\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

また，pq を r を用いて表すと，③ により，$pq=r^2-\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

したがって，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ニ}}$ である。

また，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ニ}}$ のとき，p，q，r の間には大小関係 $\boxed{ヌ}$ が成り立つ。$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。

⓪　$p<q<r$　　①　$p<r<q$　　②　$q<p<r$

③　$q<r<p$　　④　$r<p<q$　　⑤　$r<q<p$

$\boxed{2}$

(1) $\log_2\boxed{\text{ア}}=0$，$\log_2\boxed{\text{イ}}=1$ である。また，100 以下の自然数 x で $\log_2 x$ が整数になるものは全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

(2) $r=\log_2 3$ とおく。このとき，$\log_2 54$ を r を用いて表すと

$\log_2 54=\boxed{\text{エ}}r+\boxed{\text{オ}}$ となる。また，$\log_2 5$ と $\dfrac{r+3}{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と r の大きさをそれぞれ比較すると $\log_2 5\boxed{\text{カ}}\dfrac{r+3}{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boxed{\text{キ}}r$ である。$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ② のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

(3) k を 3 以上の整数とする。$\log_k 2$ の値を調べよう。

$n\leqq\log_k 2<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

また，整数 m について，不等式 $\dfrac{m}{10}\leqq\log_k 2$ は $\boxed{\text{ケ}}$ と書き直せることから，$\log_k 2$ を小数で表したときの小数第 1 位の数字を求めることができる。$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $km\leqq 20$　　① $k^m\leqq 20$　　② $m^k\leqq 20$

③ $km\leqq 2^{10}$　　④ $k^m\leqq 2^{10}$　　⑤ $m^k\leqq 2^{10}$

たとえば，$\log_7 2$ の小数第 1 位の数字は $\boxed{\text{コ}}$ であり，$\log_k 2$ の小数第 1 位の数字が 2 となる k の値のうち最小のものは $\boxed{\text{サシ}}$ であることがわかる。

$\boxed{3}$

関数 $f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ について考える。

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよう。$f(x)$ の導関数は $f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エ}}$

であり，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で極大値，$x=\boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。

よって，$x\geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{クケコ}}$ である。

また，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$y=\boxed{\text{シ}}x-\boxed{\text{ス}}$ である。

また，放物線 $y=x^2+px+q$ を C とし，C は点 $\left(a,\ \boxed{\text{シ}}a-\boxed{\text{ス}}\right)$ で ℓ と接しているとする。

このとき，p，q は a を用いて $p=\boxed{\text{セソ}}a+\boxed{\text{タ}}$，$q=a^{\boxed{\text{チ}}}-\boxed{\text{ツ}}$ と表される。

(3)　(2) の放物線 C は，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲では，x 軸とただ 1 点 $(\beta,\ 0)$ で交わり，$0<\beta<1$ であるとする。

このとき，$g(x)=x^2+px+q$ とおけば $g(0)g(1)=a\left(a+\boxed{\text{テ}}\right)\left(a-\boxed{\text{ト}}\right)^2<0$ である。$\left(a-\boxed{\text{ト}}\right)^2$ は負にならないので，a の値の範囲は $\boxed{\text{ナニ}}<a<\boxed{\text{ヌ}}$ であり，

$g(0)\ \boxed{\text{ネ}}\ 0$，$g(1)\ \boxed{\text{ノ}}\ 0$ である。ただし，$\boxed{\text{ネ}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ② のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$<$　　　①　$=$　　　②　$>$

放物線 C の $0\leqq x\leqq\beta$ の部分と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。また，C の $\beta\leqq x\leqq 1$ の部分と，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき，a の値によらず，$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\boxed{\text{ハ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つ選べ。

⓪　$S+T$　　　①　$\dfrac{S+T}{2}$　　　②　$2S+T$　　　③　$2T+S$

④　$S-T$　　　⑤　$T-S$　　　⑥　$2S-T$　　　⑦　$2T-S$

したがって，$S=T$ となる a の値を求めると，$a=\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}-\sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

$\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ は，漸化式 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

自然数 m に対して，$S_{2m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$ と表されるので

$$S_{2m}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\boxed{\text{カ}}}-\frac{1}{2k+\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$=\frac{m}{\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}}}$$

であり，同様に，$S_{2m+1}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})$ と表されるので

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\boxed{\text{サ}}}\right)$$

$$=\frac{\boxed{\text{シ}}m+2}{\boxed{\text{ス}}(m+\boxed{\text{セ}})}$$

である。したがって，自然数 m に対して

$$a_{2m}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}m^{\boxed{\text{チ}}}-m+\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}m(\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}})}$$

$$a_{2m+1}=\frac{2m^{\boxed{\text{チ}}}+3m+2}{\boxed{\text{テ}}(m+\boxed{\text{セ}})(\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}})}$$

である。以上のことから，2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{\text{ト}}n(n+\boxed{\text{ナ}})}+\frac{(-\boxed{\text{ニ}})^{n+1}}{\boxed{\text{ヌ}}}\quad\cdots\cdots(*)$$

である。$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ は $n=1$ のときにも成り立つので，$(*)$ はすべての自然数 n に対して成り立つ。

$\boxed{5}$

四面体 OPQR において，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ とおく。

(1)　$0<a<1$ として，線分 OP，QR を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ S，T とすると $\overrightarrow{OS}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}$，$\overrightarrow{OT}=\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{r}$ である。

線分 OQ，PR の中点をそれぞれ U，W とし，線分 UW を $a:(1-a)$ に内分する点を M とすれば $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left\{\boxed{\text{カ}}\,\vec{p}+\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{r}\right\}$ である。

よって，M は線分 ST 上にあり SM：ST＝1：$\boxed{\text{コ}}$ である。

直線 OM が三角形 PQR と交わる点を N とする。

このとき $\overrightarrow{ON}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{OM}$ である。

$\left(\boxed{\text{シ}}\right.$ と $\boxed{\text{ス}}$ は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

さらに，点 N が三角形 PQR の重心 G と一致しているとする。このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(2)　次に，$OP=OQ=\sqrt{2}$，$OR=1$，$\angle POR=90^\circ$ で，点 O と三角形 PQR の重心 G を通る直線 OG が三角形 PQR に垂直であるとき，∠POQ の大きさと線分 OG の長さを求めよう。

直線 OG が三角形 PQR に垂直であるための条件は，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ であるから $\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{タ}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{\text{チツ}}$ である。

よって $\angle POQ=\boxed{\text{テトナ}}^\circ$，$OG=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。