
第 9 章

～ 確率分布と統計的な推測 ～

第1講 確率変数と確率分布

1 確率変数と確率分布

1 確率変数と確率分布

確率変数 試行の結果によってその値が定まり、各値に対応して確率が定まるような変数を確率変数という。

確率分布 確率変数 X のとりうる値とその値のとり確率との対応関係を、 X の確率分布という。確率変数 X のとりうる値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であり、それぞれの値をとる確率が $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるとき、次が成り立つ。

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0 \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

2 確率変数と期待値と分散 3 確率変数の和と積

1 確率変数と期待値

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき、 X の期待値 $E(X)$ は

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

2 確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X の確率分布が右上の表で与えられているとする。

分散 $E(X) = m$ とするとき、分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \dots + (x_n - m)^2 p_n \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k = E((X - m)^2) \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

標準偏差 標準偏差 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

3 $aX + b$ の期待値、分散、標準偏差

X を確率変数、 a, b を定数とするとき

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{V(ax + b)} = |a| \sigma(X)$$

4 同時分布

2つの確率変数 X, Y について、

$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ とするとき、 (x_i, y_j) と p_{ij} の対応を X と Y の同時分布という。

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

が常に成り立つとき、 X, Y は互いに独立であるという。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$					$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nm}	p_n
計	q_1	q_2	$\dots$	q_n	1

5 確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y について

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (a, b \text{ は定数})$$

【注】 3つ以上の確率変数でも同様のことが成り立つ。

6 独立な2つの確率変数

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \quad (a, b \text{ は定数})$$

【注】 3つ以上の確率変数でも同様のことが成り立つ。

第1講 例題

1 ★☆☆

3枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数を X とする。

- (1) X の確率分布を求めよ。 (2) $P(2 \leq X \leq 3)$ を求めよ。

2 ★☆☆

さいころを2回投げて、1の目が1回目のみに出ると10点、2回目のみに出ると20点、1回目、2回目ともに出ると30点が得られる。得点 X の期待値を求めよ。

3 ★☆☆

当たりくじ3本を含む10本のくじがある。このくじを同時に4本引いたときの当たりくじの本数を X とする。 X の分散と標準偏差を求めよ。

4 ★☆☆

赤玉が3個、白玉が2個入っている袋から、同時に2個の玉を取り出すとき、白玉の個数を X とする。確率変数 $Y = -2X + 3$ の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

5 ★★☆☆

原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。硬貨を投げて表が出たら $+3$ 、裏が出たら -2 移動する。硬貨を3回投げた後の点 P の座標を T とする。 T の分散を求めよ。

6 ★★☆☆

袋の中には1, 2の数字を書いたカードがそれぞれ6枚、3枚の計9枚入っている。これらのカードをもとにもどさずに1枚ずつ取り出すとき、1枚目、2枚目のカードの数字をそれぞれ X , Y とする。このとき、 X と Y の同時分布を求めよ。

7 ★☆☆

- (1) 1から9までの整数から1つの整数を選ぶとき、それが奇数である事象 A と5以下である事象 B は独立であるか、従属であるか。
(2) 52枚のトランプから1枚を引くとき、それがハートである事象 A とエースである事象 B は独立であるか、従属であるか。

8 ★★☆☆

確率変数 X の期待値が -3 で分散が5、確率変数 Y の期待値が2で分散が4であり、 X と Y が互いに独立であるとする。

- (1) 確率変数 $Z = X + Y$ の期待値、分散、標準偏差を求めよ。
(2) 確率変数 $W = XY$ の期待値を求めよ。

第 1 講 例題演習

1

白玉 5 個，黒玉 3 個が入っている袋の中から，同時に 3 個を取り出し，その中に含まれる白玉の個数を X とする。

- (1) X の確率分布を求めよ。 (2) $P(1 \leq X \leq 2)$ を求めよ。

2

つぼの中に 5 個の白玉と 3 個の赤玉が入っている。このつぼの中から，同時に 3 個の玉を取り出すとき，それに含まれる赤玉の個数を X とする。確率変数 X の期待値を求めよ。

3

白玉 4 個と黒玉 6 個の入った袋がある。この袋の中から 3 個の玉を同時に取り出したとき，白玉の個数を X とする。確率変数 X の期待値と標準偏差を求めよ。

4

赤玉が 3 個，白玉が 2 個入っている袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，白玉の個数を X とする。確率変数 $Y = 2X + 1$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

5

さいころの 1 つの面を 1，他の 2 つの面を 2，残りの 3 つの面を 3 と書き直す。このさいころを 2 回投げて，1 回目に出た目の数を十の位，2 回目に出た目の数を一の位として得られる 2 桁の数を X とする。確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

6

2 枚の硬貨を同時に投げる試行を 2 回行う。1 回目の試行で表の出る枚数を X ，2 回目の試行で表の出る枚数を Y とするとき， X と Y の同時分布を求めよ。

7

次の事象 A ， B は独立であるか，従属であるか。

- (1) 1 から 10 までの 10 個の整数から 1 個の整数を選ぶとき

A : 奇数， B : 5 以下

- (2) 1 組 52 枚のトランプから 1 枚抜き出すとき

A : スペード， B : 絵札

第1講 例題演習

8

3つの確率変数 X , Y , Z が互いに独立で、それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき、次の問いに答えよ。

X	0	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	1	5	計
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Z	2	4	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

- (1) $X+Y+Z$ の期待値を求めよ。
- (2) $X+Y+Z$ の分散を求めよ。
- (3) XYZ の期待値を求めよ。

第1講 レベルA

1

白玉6個と赤玉4個が入っている袋から玉を次の方法で取り出す。白玉の出た回数を X とするとき、 X の期待値と分散をそれぞれ求めよ。

- (1) 1個ずつ、もとに戻さず2回続けて取り出す。
- (2) 1個ずつ、2回取り出す。ただし、取り出した玉は毎回もとに戻す。

2 [宮崎医科大]

n は2以上の自然数とする。1から n までの自然数 $1, 2, \dots, n$ の各数を1つずつ書いた n 枚のカードが入った箱がある。この箱から同時に2枚のカードを取り出して、そのうち大きい方の数を X とする。

- (1) $1 \leq k \leq n$ である自然数 k に対して $X=k$ となる確率を求めよ。
- (2) X の期待値と分散を求めよ。

3

1から8までの番号をつけた8枚のカードから1枚を取り出すとき、その番号が偶数であるという事象を A 、3の倍数であるという事象を B 、6以上であるという事象を C とする。

- (1) A と B が独立であることを示せ。
- (2) A と C が従属であることを示せ。
- (3) B と C が従属であることを示せ。

4 [神戸女学院大]

1から9までの数字が書かれている9枚のカードから3枚のカードを抜き出して並べ、3桁の数字を作るとき

- (1) 3桁の数字が偶数である確率を求めよ。
- (2) 3桁の数字が3の倍数である確率を求めよ。
- (3) 3桁の数字の期待値を求めよ。
- (4) 各桁の数字の和の期待値を求めよ。

第 1 講 レベル B

1 [慶応義塾大]

1つのさいころを振って出た目の数だけ得点がもらえるゲームがある。ただし、出た目が気に入らなければ、1回だけ振り直すことを許すとする。

このゲームでもらえる得点の期待値が最大になるようにふるまったとき、その期待値を求めよ。

2 [鹿児島大]

大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える。この試行で、大きいさいころの出た目を X ，小さいさいころの出た目を Y とする。 $T=2X-Y$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 確率 $P(T=6)$ ， $P(T \geq 0)$ を求めよ。
- (2) 分散 $V(X)$ ，平均 $E(T)$ を求めよ。
- (3) $V(aT)=25$ となる定数 a の値を求めよ。

3 [千葉大]

X ， Y はどちらも 1， -1 の値をとる確率変数で、それらは

$$P(X=1, Y=1) = P(X=-1, Y=-1) = a$$

$$P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{2} - a$$

を満たしているとする。ただし、 a は $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。

- (1) 確率 $P(X=-1)$ と $P(X=1)$ を求めよ。
- (2) 2つの確率変数の和 $X+Y$ の確率分布を求めよ。
- (3) 2つの確率変数の和の期待値 $E(X+Y)$ と分散 $V(X+Y)$ を求めよ。
- (4) X と Y が互いに独立であるための a の値を求めよ。

第2講 二項分布と正規分布

4 二項分布

1 二項分布

二項分布 $B(n, p)$ とは、次の式で与えられる確率分布である。

$$P(X=r) = {}_nC_r p^r q^{n-r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, n) \quad \text{ただし, } q=1-p$$

2 二項分布に従う確率変数の期待値, 分散, 標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき

$$\text{期待値は } E(X) = np$$

$$\text{分散は } V(X) = npq \quad \text{ただし, } q=1-p$$

$$\text{標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

5 正規分布

1 連続した値をとる確率変数

X を連続した値をとる確率変数, $f(x)$ を X の確率密度関数とすると, $f(x)$ は次のような性質をもつ。

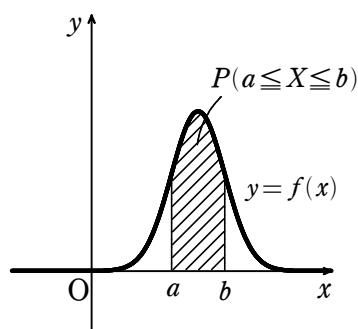
1 常に $f(x) \geq 0$ で

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

2 X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ のとき

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$$

$$\text{期待値 } E(X) = m = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \quad \text{分散 } V(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-m)^2 f(x) dx$$



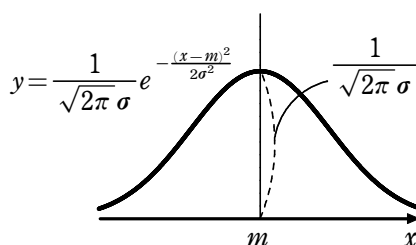
2 正規分布 $N(m, \sigma^2)$

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

1 期待値は $E(X) = m$

標準偏差は $\sigma(X) = \sigma$

2 分布曲線 $y = f(x)$ は直線 $x = m$ に関して対称であり, y は $x = m$ で最大値をとる。
また, x 軸を漸近線とし, 標準偏差 σ が大きくなると曲線の山は低くなって横に広がる。



3 標準正規分布 $N(0, 1)$

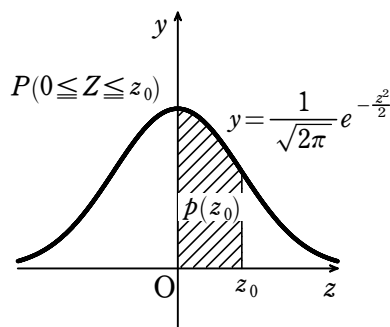
1 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき,

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} \quad \text{とおくと, 確率変数}$$

Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする。

$z_0 \geq 0, z_1 \geq 0$ とし, $P(0 \leq Z \leq z_0) = p(z_0)$ とすると, たとえば, 次のことが成り立つ。



$$P(z_0 \leq Z \leq z_1) = p(z_1) - p(z_0)$$

$$P(Z \geq 0) = 0.5 \quad P(Z \leq 0) = 0.5 \quad P(Z \geq z_0) = 0.5 - p(z_0)$$

$$P(-z_1 \leq Z \leq -z_0) = p(z_1) - p(z_0) \quad P(-z_0 \leq Z \leq z_1) = p(z_0) + p(z_1)$$

【標準正規分布表】

z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

4 二項分布の正規分布による近似

- 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う。ただし, $q=1-p$ である。
- 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X に対し, $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ は, n が大きいとき, 近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。ただし, $q=1-p$ である。

第2講 例題

1 ★☆☆

次の二項分布の平均，分散および標準偏差を求めよ。

- (1) $B\left(16, \frac{1}{2}\right)$ (2) $B\left(7, \frac{1}{4}\right)$ (3) $B\left(15, \frac{2}{3}\right)$

2 ★☆☆

○，×で答える6つの問題が与えられている。この解答をするのに適当に○，×をつけるときの正解数を X とする。 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

3 ★☆☆

確率変数 X のとる値が $0 \leq X \leq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$)

で与えられるとき， $P(0.4 \leq X \leq 1.6)$ を求めよ。また， X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

4 ★☆☆

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

- (1) $P(0 \leq Z \leq 2)$ (2) $P(Z \geq 2.4)$ (3) $P(-2 \leq Z \leq 1)$

5 ★☆☆

確率変数 X が正規分布 $N(4, 5^2)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

- (1) $P(X \geq 10)$ (2) $P(1 \leq X \leq 9)$

6 ★★☆☆

ある高等学校の3年男子500人の身長が，平均170.0 cm，標準偏差5.5 cmの正規分布に従うものとする。

- (1) 身長が165 cm以上の男子は，約何%いるか。
(2) 身長の高い方から165人の中に入るには，約何 cm 以上あればよいか。小数第1位まで求めよ。

7 ★★★☆☆

1枚の硬貨を400回投げて，表の出る回数を X とするとき， $200 \leq X \leq 220$ となる確率を求めよ。

第2講 例題演習

1

次の二項分布の平均，分散と標準偏差を求めよ。

- (1) $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ (2) $B\left(5, \frac{1}{4}\right)$ (3) $B\left(12, \frac{2}{3}\right)$

2

さいころを 30 回投げるとき，1 の目が出る回数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

3

確率変数 X が区間 $0 \leq X \leq 10$ の任意の値をとることができ，その確率密度関数 $f(x)$ が

$f(x) = \frac{3}{500}x(10-x)$ で与えられている。このとき，次のものを求めよ。

- (1) 確率 $P(3 \leq X \leq 7)$ (2) 期待値 $E(X)$ (3) 標準偏差 $\sigma(X)$

4

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

- (1) $P(0 \leq Z \leq 2)$ (2) $P(0 \leq Z \leq 1.54)$ (3) $P(1 \leq Z \leq 3)$
(4) $P(Z \geq 2.4)$ (5) $P(-2 \leq Z \leq 1)$ (6) $P(-1.2 \leq Z)$

5

確率変数 X が正規分布 $N(30, 4^2)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

- (1) $P(X \leq 30)$ (2) $P(30 \leq X \leq 38)$ (3) $P(38 \leq X \leq 42)$
(4) $P(20 \leq X \leq 35)$ (5) $P(X \geq 35)$

6

ある市の高校 2 年男子 500 人の身長は，平均 170.0 cm，標準偏差 6.5 cm である。身長分布を正規分布とみなすとき，次の問いに答えよ。

- (1) 身長 165 cm 以上の男子は，約何%いるか。
(2) 身長の高い方から 100 番目の中に入るには，何 cm 以上あればよいか。小数第 1 位まで求めよ。

7

不良品ができる確率が 0.02 である製品を 2500 個作ったとき，その中に含まれる不良品が次のようになる確率を求めよ。

- (1) 64 個以上 (2) 36 個以上 64 個以下

第2講 レベルA

1

硬貨を6枚投げたとき、表の出る枚数を X とする。また $X=r$ のとき、半径 r の円の面積を Y とする。

- (1) X の期待値と分散を求めよ。 (2) Y の期待値を求めよ。

2

赤玉 a 個、青玉 b 個、白玉 c 個合わせて100個入った袋がある。この袋から無作為に1個の玉を取り出し、色を調べてからもとに戻す操作を n 回繰り返す。このとき、赤玉を取り出した回数を X とする。

X の期待値が $\frac{16}{5}$ 、分散が $\frac{64}{25}$ であるとき、袋の中の赤玉の個数 a および回数 n を求めよ。

3 [琉球大]

さいころを投げて、1, 2の目が出たら0点、3, 4, 5の目が出たら1点、6の目が出たら100点を得点とするゲームを考える。

さいころを100回投げたときの合計得点を100で割った余りを X とする。このとき、 $X \leq 46$ となる確率 $P(X \leq 46)$ を求めよ。

4 [旭川医科大]

ある国では、その国民の血液型の割合はO型30%、A型35%、B型25%、AB型10%であるといわれている。いま、無作為に400人を選ぶとき、AB型の人が37人以上49人以下となる確率を求めよ。

5

ある花の種は平均5%、標準偏差20%で発芽不良となる。この種を同じ数ずつ袋に入れる。このとき、各袋の発芽不良の種の混入割合の平均の標準偏差を5%におさえるには少なくとも何粒必要か。

第2講 レベルB

1 [鹿児島大]

赤玉 r 個，青玉 b 個，白玉 w 個合わせて 100 個入った袋がある．この袋から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻す操作を n 回繰り返す．このとき，赤玉を取り出した回数を X とする．また， n 回の操作で n 回目に初めて青玉が出たとき，それまでに赤玉を取り出した回数を Y とする．

- (1) X の平均と標準偏差を n, r を用いて表せ．
- (2) X の平均が $\frac{16}{5}$ ，標準偏差が $\frac{8}{5}$ であるとき，袋の中の赤玉の個数 r および回数 n を求めよ．
- (3) r, n は (2) で求めた値であり， Y の平均が $\frac{15}{4}$ であるとき，袋の中の青玉の個数 b を求めよ．

2

学科の成績 x を記録するのに，平均が m ，標準偏差が σ のとき，右の表に従って，1 から 5 までの評点で表す．成績が正規分布に従うものとして，次の問いに答えよ．

成 績	評 点
$x < m - 1.5\sigma$	1
$m - 1.5\sigma \leq x < m - 0.5\sigma$	2
$m - 0.5\sigma \leq x \leq m + 0.5\sigma$	3
$m + 0.5\sigma < x \leq m + 1.5\sigma$	4
$m + 1.5\sigma < x$	5

- (1) 45 人の学級で，評点 1, 2, 3, 4, 5 の生徒の数は，それぞれ何人くらいずつになるか．
- (2) $m = 62$ ， $\sigma = 20$ のとき，成績 85 の生徒にどのような評点がつくか．

3

昨年 A さんがある花の種を 100 粒まいたところ，そのうちの 80 粒が発芽した．その花から取れた種を「今年の種」，昨年まいた種を「昨年の種」とよぶことにする．ただし，1 粒の種の発芽は他の種の発芽に影響しないとする．

- (1) 今年の種の発芽率が昨年の種の発芽率と同じであると仮定すると，51 粒以上発芽させるには何粒以上の種をまけばよいか．
- (2) (1) で必要とされる最小の数だけ種をまいたところ，56 粒発芽した．今年の種の発芽率は何 % か．
- (3) 今年の種を 400 粒まいたときに，360 粒以上発芽する確率は約何 % か．ただし， $\sqrt{7} = 2.65$ とし，% の値は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

第3講 統計的な推測・仮説検定

6 母集団と標本 7 標本平均の分布

1 全数調査と標本調査

全数調査 調査の対象全体からデータを集めて調べる方法

標本調査 調査の対象全体からその一部を抜き出して調べる方法

2 母集団分布

母集団における変数 x の分布を母集団分布, その平均値を母平均, 標準偏差を母標準偏差という。大きさ 1 の無作為標本における変数 x の値を X とすると, X は確率変数であり, この X の確率分布, 期待値, 標準偏差は, それぞれ, 母集団分布, 母平均, 母標準偏差と一致する。

3 標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき

標本平均 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, 期待値 $E(\bar{X}) = m$, 標準偏差 $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4 標本平均の分布と正規分布

母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について,

1 標本平均 $\bar{X}$ は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

2 標本平均 $\bar{X}$ に対して, $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は n が大きいとき, 近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

5 大数の法則

母平均 m の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, n が大きくなるに従って, その標本平均 $\bar{X}$ は母平均 m に近づく。

8 推定

1 母平均の推定

母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき, 母平均 m に対する信頼度 95 %

の信頼区間は $\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

【注】 上の σ は母標準偏差であるが, これが不明の場合は, 代わりに標本の標準偏差 S を用いてよい。

2 母比率の推定

標本の大きさ n が大きいとき, 標本比率を R とすると, 母比率 p に対する信頼度 95 %

の信頼区間は $\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$

9 仮説検定の考え方

1 仮説検定

母集団分布に関する仮定を仮説といい、標本から得られた結果によって、この仮説が正しいか正しくないかを判断する方法を仮説検定をいう。また、仮説が正しくないと判断することを、仮説を棄却するという。

2 有意水準と棄却域

仮説検定においては、どの程度小さい確率の事象が起こると仮説を棄却するか、という基準を予め定めておく。この基準となる確率 α を有意水準または危険率という。

有意水準 α に対し、立てた仮説のもとでは実現しにくい確率変数の値の範囲を、その範囲の確率が α になるように定める。この範囲を有意水準 α の棄却域といい、実現した確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却する。

補足 有意水準は、0.05 (5 %) や 0.01 (1 %) とすることが多い。

3 仮説検定の手順

仮説検定の手順を示すと、次のようになる。

- ① 事象が起こった状況や原因を推測し、仮説を立てる。
- ② 有意水準 α を定め、仮説に基づいて棄却域を求める。
- ③ 標本から得られた確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却し、棄却域に入らなければ仮説を棄却しない。

注意 有意水準 α で仮説検定を行うことを、「有意水準 α で検定する」ということがある。

第3講 例題

1 ★☆☆

1, 2, 3 の数字を記入したカードが、それぞれ 2 枚, 2 枚, 1 枚ある。この 5 枚のカードを母集団として、カードの数字を X とするとき

- (1) 母集団分布を求めよ。 (2) 母平均, 母標準偏差を求めよ。

2 ★☆☆

ある県の 17 歳女子の身長は、平均 157.9 cm, 標準偏差 6.4 cm である。この母集団から無作為に 100 人の標本を抽出するとき、その標本平均 $\bar{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

3 ★★☆☆

1 個のさいころを 150 回投げるとき、出る目の平均を $\bar{X}$ とする。 $\bar{X}$ の期待値, 標準偏差を求めよ。

4 ★★☆☆

ある県の高校 2 年生を対象に実施された学力テストの得点の分布は、平均 58 点, 標準偏差 12 点の正規分布に従うという。この母集団から 100 人の標本を無作為に抽出するとき、その標本平均 $\bar{X}$ が 55 点以上 61 点以下である確率を求めよ。

5 ★★☆☆

ある国の有権者の内閣支持率が 50% であるとき、無作為抽出した 400 人の有権者の内閣支持率 R が、48 % 以上 52 % 以下である確率を求めよ。

6 ★☆☆

砂糖の袋の山から 100 個を無作為に抽出して、重さの平均値 300.4 g, 標準偏差 7.5 g を得た。1 袋当たりの重さを信頼度 95% で推定せよ。また、信頼度 99% で推定せよ。

7 ★☆☆

あるテレビ番組の視聴率を調べるため、200 世帯を無作為に抽出して調査したところ 56 世帯が視聴していることがわかった。視聴率 p を信頼度 95 % で推定せよ。

8 ★★☆☆

ある工場で生産される製品の不良率を信頼度 95 % で推定したい。この不良率はほぼ 5 % であると予想できるという。信頼区間の幅を 0.02 以下にするには標本の大きさをいくらにすればよいか。

第3講 例題

9 ★☆☆

ある1個のさいころを720回投げたところ、1の目が95回出た。このさいころは、1の出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。

10 ★★☆☆

ある種子の発芽率は、従来80%であったが、発芽しやすいように品種改良した。品種改良した種子から無作為に400個抽出して種をまいたところ334個が発芽した。品種改良によって発芽率が上がったと判断してよいか。次の有意水準で検定せよ。

(1) 5%

(2) 1%

第3講 例題演習

1

1, 2, 3, 4 の数字を記入したカードが, それぞれ 1, 2, 3, 4 枚, 合計 10 枚ある。
これを母集団とし, カードの数字を X とする。

- (1) 母集団分布を求めよ。 (2) 母平均, 母標準偏差を求めよ。

2

ある県の 16 歳の男子学生の体重は, 平均値 59.8 kg, 標準偏差 6.9 kg である。この母集団から無作為に 100 人からなる標本を取り出すとき, その標本平均 $\bar{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

3

1 個のさいころを 100 回投げるとき, 出る目の数の平均を $\bar{X}$ とする。 $\bar{X}$ の期待値, 標準偏差を求めよ。

4

18 歳男子の体重が, 平均 58.5 kg, 標準偏差 10 kg の正規分布に従うという。この母集団から 64 人の標本を無作為に抽出するとき, その標本平均 $\bar{X}$ が 56 kg 以下である確率を求めよ。

5

全国の有権者の内閣支持率が 50% であるとき, 無作為抽出した 2500 人の有権者の内閣支持率を R とする。 R が 48% 以上 52% 以下である確率を求めよ。

6

ある県の 18 歳男子 100 人を無作為抽出し, 身長を測定すると, 平均は 169.2 cm で標準偏差は 9.0 cm であった。この県の 18 歳男子の身長の平均を信頼度 95 % で推定せよ。

7

ある町の駅で乗降客 400 人を任意に抽出して調べたところ, 196 人がその町の住人であった。乗降客中, その町の住人の比率を信頼度 99% で推定せよ。

8

ある町の 20 歳の女性の運転免許保有率を推定したい。この保有率がほぼ 30 % であると予想できるというとき, 信頼区間の幅が 0.02 以下になるように 95 % の信頼度で推定する場合には, 標本の大きさをいくらにすればよいか。100 未満は切り上げて答えよ。

第3講 例題演習

9

えんどう豆の交配で、2代雑種において黄色の豆と緑色の豆のできる割合は、メンデルの法則に従えば3:1である。ある実験で黄色の豆が428個、緑色の豆が132個得られたという。この結果はメンデルの法則に反するといえるか。有意水準5%で検定せよ。ただし、 $\sqrt{105}=10.25$ とする。

10

あるところにきわめて多くの白球と黒球がある。いま、900個の球を無作為に取り出したとき、白球が480個、黒球が420個あった。この結果から、白球の方が多いといえるか。次の有意水準で検定せよ。

(1) 5%

(2) 1%

第3講 レベルA

1 [山梨医科大]

A と B が跳んだ距離を競う競技会に参加している。B が跳ぶ距離の確率分布はほぼ正規分布をなすものとする。B が最近参加した 20 回の競技会で跳んだ距離の記録 x_i

($i = 1, 2, \dots, 20$; 単位は m) を調べたところ $\sum_{i=1}^{20} x_i = 107.00$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 572.90$ であつた。

いま、先に跳んだ A の記録が 5.65 m であったとき、A が B に勝つ確率はおよそいくらか。

2

ある工場で生産されている長さ 1 m のニクロム線の抵抗は、平均 5.158 オーム、標準偏差 0.1100 オームの正規分布に従う。

- (1) 100 本のニクロム線を取り出すとき、その平均が 5.180 オーム以上になる確率を求めよ。
- (2) 平均値の標準偏差を 0.005 オーム以下にしたい。ニクロム線を少なくとも何本取り出せばよいか。

3

- (1) ある地方 A で 15 歳の男子 400 人の身長を測ったところ、平均値 168.4 cm、標準偏差 5.7 cm を得た。地方 A の 15 歳の男子の身長の平均値を、95% の信頼度で推定せよ。
- (2) 円の直径を 100 回測ったら、平均値 23.4 cm、標準偏差 0.1 cm であった。この円の面積を信頼度 99% で推定せよ。ただし、 $\pi = 3.14$ として計算せよ。

4 [山梨医科大]

ある動物の新しい飼料を試作し、任意に抽出された 100 匹にこの新しい飼料を毎日与えて 1 週間後に体重の変化を調べた。増加量の平均は 2.57 kg、標準偏差は 0.35 kg であった。この増加量について

- (1) 母平均を信頼度 95 % で推定せよ。
- (2) 標本平均と母平均の違いを 95 % の確率で 0.05 kg 以下にするには、標本数をいくらにすればよいか。

5 [琉球大]

ある 1 個のさいころを 500 回投げたところ、4 の目が 100 回出たという。このさいころの 4 の目の出る確率は $\frac{1}{6}$ でないと判断してよいか。優位水準(危険率) 3 % で検定せよ。

第3講 レベルB

①[旭川医科大]

2つの地域 A, B 産の大豆をある比率で混ぜ合わせたものがある。A 産の大豆の全体に対する比率は 0.2 くらいであると考えられている。

いま、このような大豆の集まりから無作為に何粒かを選び出すことにする。A 産の大豆の比率 p を信頼度 95 % で推定するとき、信頼区間の幅を 0.02 以下にするには、何粒くらいを選び出すとよいか。

②[東京理科大]

ある国の人口は十分に大きく、国民の血液型の割合は A 型 40 %, O 型 30 %, B 型 20 %, AB 型 10 % である。この国民の中から無作為に選ばれた人達について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 人の血液型が一致する確率を求めよ。
- (2) 4 人の血液型がすべて異なる確率を求めよ。
- (3) 5 人中 2 人が A 型である確率を求めよ。
- (4) n 人中 A 型の人の割合が 39 % から 41 % までの範囲にある確率が、0.95 以上であるためには、 n は少なくともどれほどの大きさであればよいか。

③[旭川医科大]

ある種類のねずみは、生まれてから 3 か月後の体重が平均 65 g, 標準偏差 4.8g の正規分布に従うという。いまこの種類のねずみ 10 匹を特別な飼料で飼育し、3 か月後に体重を測定したところ、次の結果を得た。

67, 71, 63, 74, 68, 61, 64, 80, 71, 73

この飼料はねずみの体重に異常な変化を与えたと考えられるか。有意水準 5 % で検定せよ。