

1

次の角のうち，その動径が 120° の動径と一致するものはどれか。

480° ， 960° ， 1200° ， -120° ， -600°

【解答】 480° ， 1200° ， -600°

【解説】

$$480^\circ = 120^\circ + 360^\circ \times 1$$

$$960^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times 2$$

$$1200^\circ = 120^\circ + 360^\circ \times 3$$

$$-120^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times (-1)$$

$$-600^\circ = 120^\circ + 360^\circ \times (-2)$$

よって，求める角は 480° ， 1200° ， -600°

2

次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

(1) 60° (2) 390° (3) -615°

(4) $\frac{\pi}{4}$ (5) $-\frac{7}{6}\pi$ (6) $\frac{23}{3}\pi$

【解答】 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{13}{6}\pi$ (3) $-\frac{41}{12}\pi$ (4) 45° (5) -210° (6) 1380°

【解説】

(1) $\frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$ (ラジアン) (2) $\frac{\pi}{180} \times 390 = \frac{13}{6}\pi$ (ラジアン)

(3) $\frac{\pi}{180} \times (-615) = -\frac{41}{12}\pi$ (ラジアン)

(4) $\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45$ よって 45°

(5) $\frac{180}{\pi} \times \left(-\frac{7}{6}\pi\right) = -210$ よって -210°

(6) $\frac{180}{\pi} \times \frac{23}{3}\pi = 1380$ よって 1380°

3

半径2 cm，弧の長さ3 cmの扇形の中心角は何ラジアンか。

また，この扇形の面積を求めよ。

【解答】 中心角 $\frac{3}{2}$ ラジアン，面積 3 cm^2

【解説】

中心角を θ ラジアンとすると，条件から $3 = 2 \cdot \theta$

よって $\theta = \frac{3}{2}$ (ラジアン)

扇形の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ (cm²)

4

周の長さが16 cmの扇形のうち，その面積が最大になる場合の，半径，中心角，面積を求めよ。

【解答】 半径4 cm，中心角2ラジアン，最大面積16 cm²

【解説】

扇形の半径を r cm，中心角を θ ラジアン，面積を S cm²，弧の長さを l cmとする。

$$l = r\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad S = \frac{1}{2}rl \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

周の長さが16 cmであるから $2r + l = 16$

よって $l = 16 - 2r \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$r > 0$ ， $l > 0$ であるから $0 < r < 8$

③を②に代入して

$$S = \frac{1}{2}r(16 - 2r) = 8r - r^2$$

$$= -(r - 4)^2 + 16$$

$0 < r < 8$ の範囲で， S は $r = 4$ のとき最大となる。

このとき，扇形について

半径は 4 cm

中心角は，①，③から

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{16 - 2 \cdot 4}{4} = 2 \text{ (ラジアン)}$$

S の最大値は16であるから，最大面積は 16 cm²

5

$\cos \theta = \frac{5}{7}$ のとき， $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

【解答】 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ， $\tan \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ または $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ， $\tan \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

【解説】

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ のとき $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$ のとき $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right) \div \frac{5}{7} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

6

$\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 3 + 2\sqrt{2}$ のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ の値を求めよ。

【解答】 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ または $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解説】

$\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 3 + 2\sqrt{2}$ の分母を払って $1 + \tan \theta = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \tan \theta)$

整理して $2(2 + \sqrt{2})\tan \theta = 2(1 + \sqrt{2})$

したがって $\tan \theta = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$

$$= \frac{2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ ゆえに $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$

したがって $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

以上から $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ または $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

7

次の等式を証明せよ。

(1) $(1 + \sin \theta + \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta - \cos \theta)^2 = 4(1 + \sin \theta)$

(2) $\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cos \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) (左辺) $= \{(1 + \sin \theta) + \cos \theta\}^2 + \{(1 + \sin \theta) - \cos \theta\}^2$

$$= (1 + \sin \theta)^2 + 2(1 + \sin \theta)\cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$+ (1 + \sin \theta)^2 - 2(1 + \sin \theta)\cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2\{(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta\} = 2\{1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta\}$$

$$= 2\{2 + 2\sin \theta\} = 4(1 + \sin \theta) = \text{(右辺)}$$

(2) (左辺) $= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta} = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2}$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

(右辺) $= \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

よって (左辺) = (右辺)

8

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \qquad (2) \tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$$

解答 (1) -3 (2) -18

解説

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \dots\dots ①$$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \qquad \text{ゆえに} \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\text{これを①に代入して} \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -3$$

$$(2) \tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta} = \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)^3 - 3 \tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \\ = \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)^3 - 3 \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \\ = (-3)^3 - 3(-3) = -27 + 9 = -18$$

9

θ の動径が第1象限にあり、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$ のとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) \sin \theta + \cos \theta \qquad (2) \sin \theta - \cos \theta \qquad (3) \sin \theta, \cos \theta$$

$$\text{解答} (1) \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (2) \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$(3) \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{または} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

解説

θ の動径が第1象限にあるから

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

$\sin \theta + \cos \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots ①$$

$$(2) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots ②$$

(3) ①, ②を連立して解くと

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{または} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

別解 条件式 $\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$ と①から、 $\sin \theta, \cos \theta$ は、方程式 $t^2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}t + \frac{2}{5} = 0$

の解である。両辺に5を掛けて $5t^2 - 3\sqrt{5}t + 2 = 0$

これを解くと

$$t = \frac{-(-3\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{5}}{10}$$

$$\text{よって} \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{または} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

10

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \cos(\theta + \pi) + \cos \left(\theta + \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$(2) \sin(\theta + \pi) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos(-\theta)$$

解答 (1) 0 (2) 1

解説

$$(1) \cos \left(\theta + \frac{3}{2}\pi \right) = \cos \left\{ \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \pi \right\} = -\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta$$

したがって (与式) $= \cos \theta + (-\sin \theta) + (-\cos \theta) + \sin \theta = 0$

$$(2) (\text{与式}) = (-\sin \theta) \cdot (-\sin \theta) + \cos \theta \cdot \cos \theta \\ = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

11

関数 $y = 4\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi \right)$ のグラフは、 $y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $^{\circ}$ π だけ

平行移動し、 θ 軸をもとにして y 軸方向に $^{\circ}$ 倍に拡大したものである。また、こ

の関数の周期は $^{\circ}$ π である。

解答 (ア) 3 (イ) 4 (ウ) 4

解説

$$4\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi \right) = 4\cos \frac{1}{2}(\theta - 3\pi)$$

よって、 $y = 4\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi \right)$ のグラフは、 $y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $^{\circ}$ 3π だけ平

行移動し、 θ 軸をもとにして y 軸方向に $^{\circ}$ 4 倍に拡大したものである。

$$\text{また、周期は} \quad 2\pi \div \frac{1}{2} = ^{\circ} 4\pi$$

12

次の関数の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$$(1) y = \sin \theta - 2 \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \qquad (2) y = 3\cos \theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$(3) y = 2\sin \theta - 1 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi \right) \qquad (4) y = -\tan \theta + 1 \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{解答} (1) \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } -1, \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -3$$

$$(2) \theta = 0 \text{ で最大値 } 4, \theta = \pi \text{ で最小値 } -2$$

$$(3) \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } 1, \theta = \frac{4}{3}\pi \text{ で最小値 } -\sqrt{3} - 1$$

$$(4) \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \sqrt{3} + 1, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ で最小値 } 0$$

解説

$$(1) 0 \leq \theta < 2\pi \text{ から} \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

よって、 $\sin \theta = t$ とおくと、関数は $y = t - 2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$

したがって

$$t = 1 \text{ すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } -1,$$

$$t = -1 \text{ すなわち} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -3$$

$$(2) 0 \leq \theta < 2\pi \text{ から} \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

よって、 $\cos \theta = t$ とおくと、関数は $y = 3t + 1 \quad (-1 \leq t \leq 1)$

したがって

$$t = 1 \text{ すなわち} \quad \theta = 0 \text{ で最大値 } 4,$$

$$t = -1 \text{ すなわち} \quad \theta = \pi \text{ で最小値 } -2$$

$$(3) 0 \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi \text{ から} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \theta \leq 1$$

よって、 $\sin \theta = t$ とおくと、関数は $y = 2t - 1 \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1 \right)$

したがって

$$t = 1 \text{ すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } 1,$$

$$t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ すなわち} \quad \theta = \frac{4}{3}\pi \text{ で最小値 } -\sqrt{3} - 1$$

$$(4) -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ から} \quad -\sqrt{3} \leq \tan \theta \leq 1$$

よって、 $\tan \theta = t$ とおくと、関数は $y = -t + 1 \quad (-\sqrt{3} \leq t \leq 1)$

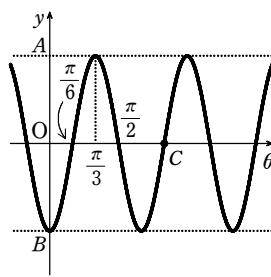
したがって

$$t = -\sqrt{3} \text{ すなわち} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \sqrt{3} + 1,$$

$$t = 1 \text{ すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ で最小値 } 0$$

13

右の図は、関数 $y=2\sin(a\theta-b)$ のグラフである。
 $a>0$, $0<b<2\pi$ のとき, a , b および図中の目盛り
 A , B , C の値を求めよ。



解答 $a=3$, $b=\frac{\pi}{2}$, $A=2$, $B=-2$, $C=\frac{5}{6}\pi$

解説

$y=2\sin(a\theta-b)$ を変形すると

$$y=2\sin a\left(\theta-\frac{b}{a}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

図から、周期は $\frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2}{3}\pi$

よって $2\pi \div a = \frac{2}{3}\pi$ ゆえに $a=3$

このとき、①は $y=2\sin 3\left(\theta-\frac{b}{3}\right)$

よって、図のグラフは、 $y=2\sin 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{b}{3}$ だけ平行移動したものである。

ここで、 $0<b<2\pi$ から $0<\frac{b}{3}<\frac{2}{3}\pi$

したがって $\frac{b}{3}=\frac{\pi}{6}$ ゆえに $b=\frac{\pi}{2}$

また $A=2$, $B=-2$, $C=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$

14

次の関数の中から、奇関数、偶関数を、それぞれ選び出せ。

- (ア) $y=x^4$ (イ) $y=x^3-4x$ (ウ) $y=x^3+1$
 (エ) $y=2\sin \theta$ (オ) $y=-\cos \theta$ (カ) $y=\tan 2\theta$

解答 奇関数(イ), (エ), (カ); 偶関数(ア), (オ)

解説

(ア) $f(x)=x^4$ とおくと $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$

よって、偶関数である。

(イ) $f(x)=x^3-4x$ とおくと $f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-f(x)$

よって、奇関数である。

(ウ) $f(x)=x^3+1$ とおくと $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$

よって、奇関数でも偶関数でもない。

(エ) $f(\theta)=2\sin \theta$ とおくと $f(-\theta)=2\sin(-\theta)=-2\sin \theta=-f(\theta)$

よって、奇関数である。

(オ) $f(\theta)=-\cos \theta$ とおくと $f(-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos \theta=f(\theta)$

よって、偶関数である。

(カ) $f(\theta)=\tan 2\theta$ とおくと $f(-\theta)=\tan 2(-\theta)=-\tan 2\theta=-f(\theta)$

よって、奇関数である。

以上から、奇関数は (イ), (エ), (カ)

偶関数は (ア), (オ)

15

次の関数のグラフをかけ。また、その周期をいえ。

(1) $y=-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

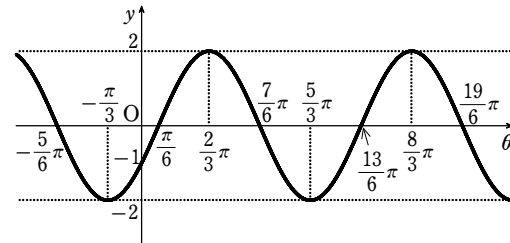
(3) $y=3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1$

解説

(1) $y=-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは、 $y=2\cos \theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行

移動した後、 θ 軸に関して対称移動したもので、[図] のようになる。

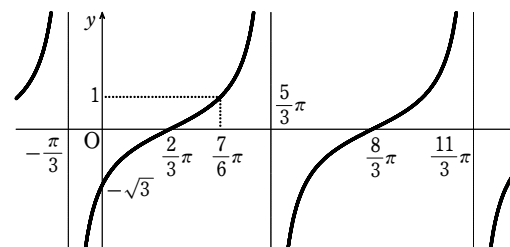
周期は 2π



(2) $\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan \frac{1}{2}\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

よって、 $y=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは、 $y=\tan \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

周期は $\pi \div \frac{1}{2}=2\pi$



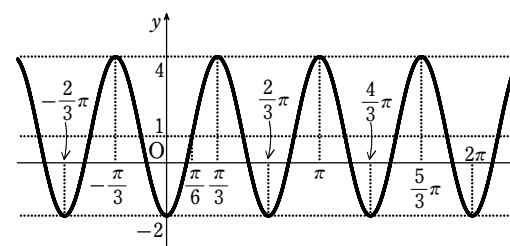
(3) $3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1=3\sin 3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$

よって、 $y=3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1$ のグラフは、 $y=3\sin 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$, y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

周期は $2\pi \div 3=\frac{2}{3}\pi$

別解 $3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1=3\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)\right\}+1=-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)+1$
 $=-3\cos 3\theta+1$

よって、 $y=3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1$ のグラフは、 $y=3\cos 3\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動した後、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。



16

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad (2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4) \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

【解答】 (1) $\theta = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$ (2) $\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ (3) $\theta = \frac{\pi}{24}, \frac{7}{24}\pi, \frac{25}{24}\pi, \frac{31}{24}\pi$

(4) $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

【解説】

(1) $\theta + \frac{\pi}{4} = \alpha$ とおくと $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ すなわち $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{9}{4}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\alpha = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

すなわち $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ よって $\theta = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$

(2) $\theta + \frac{\pi}{3} = \alpha$ とおくと $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ すなわち $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{7}{3}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\alpha = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$

すなわち $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$ よって $\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$

(3) $2\theta + \frac{\pi}{6} = \alpha$ とおくと $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 4\pi + \frac{\pi}{6}$ すなわち $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{25}{6}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$

すなわち $2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$

よって $\theta = \frac{\pi}{24}, \frac{7}{24}\pi, \frac{25}{24}\pi, \frac{31}{24}\pi$

(4) $2\theta - \frac{\pi}{3} = \alpha$ とおくと $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$

すなわち $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{11}{3}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\alpha = -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi$

すなわち $2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi$

よって $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

17

$\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ のとき、 $1 + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta$ の値を求めよ。

【解説】

$\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ から $\sin \theta = 1 - \sin^2 \theta$

よって $\sin \theta = \cos^2 \theta$

ゆえに

$$1 + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1 + \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta)^2 = 1 + \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 + 1 = 2$$

18

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ (2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$

【解説】

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ …… ①

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

ゆえに $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$ これを ① に代入して $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{8}{3}$

(2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta} = \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^3 - 3\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)$

$$= \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^3 - 3\left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)$$

$$= \left(-\frac{8}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{296}{27}$$

19

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 1$

(3) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】 (1) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi < \theta < 2\pi$ (2) $\frac{7}{12}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi, \frac{19}{12}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$

(3) $\frac{7}{24}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{24}\pi, \frac{31}{24}\pi \leq \theta \leq \frac{35}{24}\pi$

【解説】

(1) $\theta + \frac{\pi}{6} = \alpha$ とおくと $\sin \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$ すなわち $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{13}{6}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < \alpha < \frac{13}{6}\pi$

すなわち $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

よって $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi < \theta < 2\pi$

(2) $\theta - \frac{\pi}{3} = \alpha$ とおくと $\tan \alpha > 1$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$ すなわち $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{5}{3}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

すなわち $\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{3}{2}\pi$

よって $\frac{7}{12}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi, \frac{19}{12}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$

(3) $2\theta + \frac{\pi}{4} = \alpha$ とおくと $\cos \alpha \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ①

$0 \leq \theta < 2\pi$ から $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} < 4\pi + \frac{\pi}{4}$ すなわち $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{17}{4}\pi$ …… ②

② の範囲で、① を解くと $\frac{5}{6}\pi \leq \alpha \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi \leq \alpha \leq \frac{19}{6}\pi$

すなわち $\frac{5}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{19}{6}\pi$

よって $\frac{7}{24}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{24}\pi, \frac{31}{24}\pi \leq \theta \leq \frac{35}{24}\pi$

20

2 次方程式 $5x^2 - 7x + k = 0$ の 2 つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ のとき、定数 k の値を求めよ。また、2 つの解を求めよ。

【解答】 $k = \frac{12}{5}; x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

【解説】

$5x^2 - 7x + k = 0$ の 2 つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるから、解と係数の関係により

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5} \quad \text{…… ①}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{5} \quad \text{…… ②}$$

① の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{49}{25}$$

よって $1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$

ゆえに $\sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$ …… ③

②, ③ から $\frac{k}{5} = \frac{12}{25}$ よって $k = \frac{12}{5}$

これを与えられた方程式に代入して整理すると

$$25x^2 - 35x + 12 = 0$$

ゆえに $(5x - 3)(5x - 4) = 0$

したがって、2 つの解は $x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

1

次の角のうち，その動径が 120° の動径と一致するものはどれか。
 480° ， 960° ， 1200° ， -120° ， -600°

2

次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

- (1) 60°
- (2) 390°
- (3) -615°
- (4) $\frac{\pi}{4}$
- (5) $-\frac{7}{6}\pi$
- (6) $\frac{23}{3}\pi$

3

半径 2 cm ，弧の長さ 3 cm の扇形の中心角は何ラジアンか。
また，この扇形の面積を求めよ。

4

周の長さが 16 cm の扇形のうち，その面積が最大になる場合の，半径，中心角，面積を求めよ。

5

$\cos\theta=\frac{5}{7}$ のとき， $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

6

$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$ のとき， $\sin\theta$ ， $\cos\theta$ の値を求めよ。

7

次の等式を証明せよ。

- (1) $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-\cos\theta)^2=4(1+\sin\theta)$
- (2) $\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

8

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

- (1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$
- (2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$

9

θ の動径が第 1 象限にあり， $\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta$
- (2) $\sin \theta - \cos \theta$
- (3) $\sin \theta, \cos \theta$

10

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \cos (\theta + \pi) + \cos \left(\theta + \frac{3}{2} \pi \right)$
- (2) $\sin (\theta + \pi) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos (-\theta)$

11

関数 $y = 4 \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \pi \right)$ のグラフは， $y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\boxed{}$ π だけ平行移動し， θ 軸をもとにして y 軸方向に $\boxed{}$ 倍に拡大したものである。また，この関数の周期は $\boxed{}$ π である。

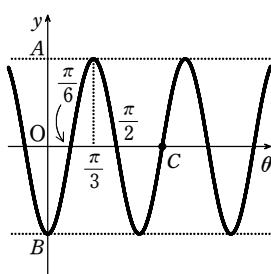
12

次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

- (1) $y = \sin \theta - 2 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$
- (2) $y = 3 \cos \theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$
- (3) $y = 2 \sin \theta - 1 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{4}{3} \pi \right)$
- (4) $y = -\tan \theta + 1 \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$

13

右の図は、関数 $y=2\sin(a\theta-b)$ のグラフである。
 $a>0$ 、 $0<b<2\pi$ のとき、 a 、 b および図中の目盛り
 A 、 B 、 C の値を求めよ。



14

次の関数の中から，奇関数，偶関数を，それぞれ選び出せ。

$$(\mathcal{A}) \quad y = x^4$$

(1) $y = x^3 - 4x$

(ウ) $y = x^3 + 1$

$$(\text{I}) \quad y = 2 \sin \theta$$

(才) $y = -\cos \theta$

(力) $y = \tan 2\theta$

15

次の関数のグラフをかけ。また、その周期をいえ。

$$(1) \quad y = -2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad y = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(3) \quad y = 3\sin\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

16

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

- (1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$
- (2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (4) $\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

17

$\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ のとき、 $1 + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta$ の値を求めよ。

18

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$
- (2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$

19

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

- (1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 1$
- (3) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

20

2 次方程式 $5x^2 - 7x + k = 0$ の 2 つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ のとき、定数 k の値を求めよ。また、2 つの解を求めよ。