$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$x \leqq y \leqq z \leqq 1$　……①

$4x+3y+2z=1$　……②　とする。

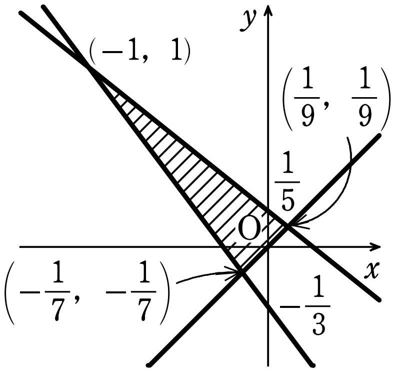
② から　$z=\dfrac{1-4x-3y}{2}$　……③

③ を ① に代入して

$$x \leqq y \leqq \frac{1-4x-3y}{2} \leqq 1$$

整理して

$$y \geqq x,\ y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5},\ y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$



この 3 つの不等式が表す領域は，図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。

よって，図より，

x の最大値は $\dfrac{1}{9}$　$\left(このとき\ y=\dfrac{1}{9},\ z=\dfrac{1}{9}\right)$

y の最小値は $-\dfrac{1}{7}$　$\left(このとき\ x=-\dfrac{1}{7},\ z=1\right)$

(2)　$3x-y+z=k$ とおく。これに ③ を代入して

$$k=3x-y+\frac{1-4x-3y}{2}=\frac{2x-5y+1}{2}$$

よって　$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1-2k}{5}$　……④

これは傾きが $\dfrac{2}{5}$，y 切片が $\dfrac{1-2k}{5}$ の直線を表す。

この直線が (1) で図示した領域と共有点をもつような，k の値の範囲が求めるものである。

右の図から，直線 ④ が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき，

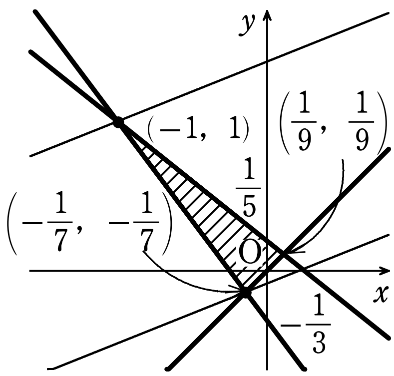
$\dfrac{1-2k}{5}$ が最大となるから k は最小で

$$k=\frac{2\cdot(-1)-5\cdot1+1}{2}=-3$$

直線 ④ が点 $\left(-\dfrac{1}{7},\ -\dfrac{1}{7}\right)$ を通るとき，$\dfrac{1-2k}{5}$ が最小となるから k は最大で

$$k=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)-5\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+1}{2}=\frac{5}{7}$$

したがって　　$-3\leqq 3x-y+z\leqq\dfrac{5}{7}$



$\boxed{2}$

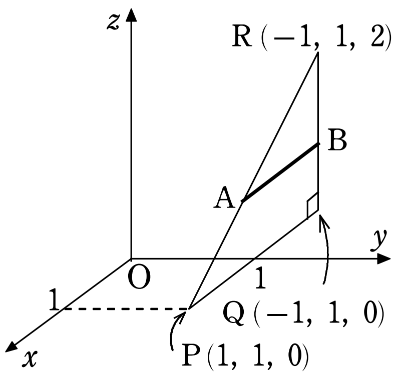
(解説)

(1)　平面 $z=t$ $(0<t<2)$ と線分 RP，RQ との交点をそれぞれ A，B とする。

△PQR は直角二等辺三角形である。

$\mathrm{BA}=\mathrm{RB}=2-t$ であるから

$\mathrm{A}(1-t,\ 1,\ t)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ t)$



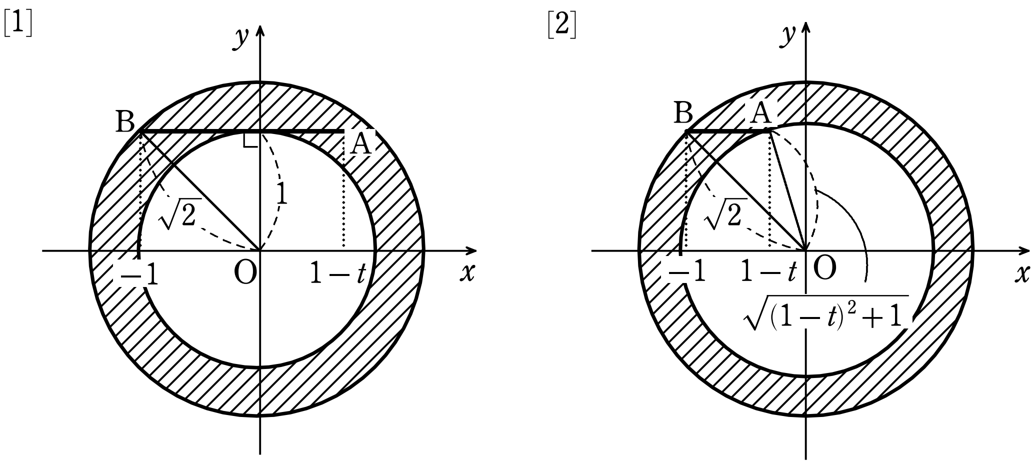
(2)　平面 $z=t$ による回転体の切り口の面積を $S(t)$ とする。切り口の図形は，線分 AB を z 軸の周りに 1 回転したものである。

[1]　$0\leqq t\leqq1$ のとき

$$S(t)=\pi\cdot(\sqrt{2})^2-\pi\cdot1^2=\pi$$

[2]　$1\leqq t\leqq2$ のとき

$$S(t)=\pi\cdot(\sqrt{2})^2-\pi\cdot\left(\sqrt{(1-t)^2+1}\right)^2=(-t^2+2t)\pi$$



[1]，[2] から，求める体積は

$$\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2(-t^2+2t)\,dt=\pi\Big[\ t\ \Big]_0^1+\pi\left[-\frac{t^3}{3}+t^2\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

$\boxed{3}$

(解説)

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，2 倍角の公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

をくり返し用いることにより，

$$\tan 2^\circ,\ \tan 4^\circ,\ \tan 8^\circ,\ \tan 16^\circ,\ \tan 32^\circ,\ \tan 64^\circ$$

はすべて有理数となる。

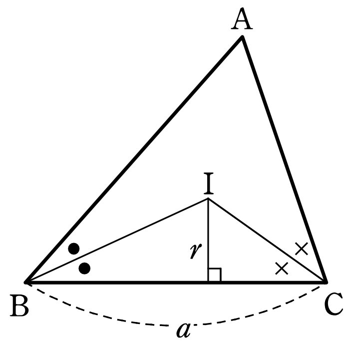
よって，$\tan 60^\circ=\tan(64^\circ-4^\circ)=\dfrac{\tan 64^\circ-\tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ\tan 4^\circ}$ であるから，$\tan 60^\circ$ は有理数となる。

一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{3}$ は無理数であるから矛盾が生じる。

したがって，$\tan 1^\circ$ は有理数ではない。

$\boxed{4}$

(解説)



$\triangle$ABC の内心を I とすると　　$r=\mathrm{IC}\sin\dfrac{C}{2}$　……①

また，$\triangle$IBC において，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{IC}}{\sin\angle\mathrm{IBC}}=\frac{a}{\sin\angle\mathrm{BIC}}$$

よって　　$\mathrm{IC}\sin\angle\mathrm{BIC}=a\sin\angle\mathrm{IBC}$

これに $\angle\mathrm{BIC}=\pi-\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{A}{2}$，$\angle\mathrm{IBC}=\dfrac{B}{2}$，

$a=2\sin A=4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ を代入すると

$$\mathrm{IC}\cos\frac{A}{2}=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$\cos\dfrac{A}{2}>0$ であるから　　$\mathrm{IC}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$

よって，① から

$$r=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A+2B}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$\sin\dfrac{A+2B}{2}\leqq 1$ であるから　　$r\leqq 2\sin\dfrac{A}{2}\left(1-\sin\dfrac{A}{2}\right)=-2\left(\sin\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

$0<\sin\dfrac{A}{2}<1$ であるから　　$r\leqq\dfrac{1}{2}$

別解　正弦定理により　　$a=2\sin A$，$b=2\sin B$，$c=2\sin C$

また，$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r\ (=\triangle\mathrm{ABC})$ から

$$r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\quad\cdots\cdots①$$

A，B，C は三角形の内角であるから

$$\sin A>0,\ \sin B>0,\ \sin C>0$$

この 3 数の相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\geqq\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

よって　　$\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^3}{27}\geqq\sin A\sin B\sin C$

したがって，① より

$$r\leqq\frac{2}{\sin A+\sin B+\sin C}\times\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^3}{27}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^2\quad\cdots\cdots②$$

$y=\sin x\ (0<x<\pi)$ のグラフは上に凸であるから，3 点 $(A,\ \sin A)$，$(B,\ \sin B)$，$(C,\ \sin C)$ を頂点とする三角形 (または線分または点) の重心を考えることにより

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqq\sin\frac{A+B+C}{3}$$

$A+B+C=\pi$ であるから

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqq\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots③$$

② と ③ から　　$r\leqq\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$