

1

(解説)

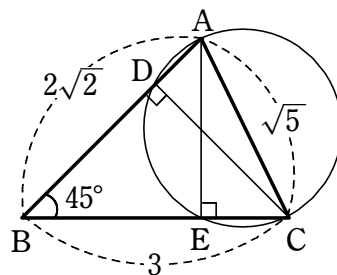
(1) $\overline{p}$: m と n の少なくとも一方は偶数である。2つの自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。このとき, m が奇数ならば n は偶数である。(ア①)また, m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい。(イ②)(2) $p \Rightarrow q$ は真。 $3mn$ が奇数であるとき, mn は奇数であるから, m と n はともに奇数である。したがって, $q \Rightarrow p$ は真。よって, p は q であるための必要十分条件である。(ウ①) $p \Rightarrow r$ は真。 $r \Rightarrow p$ は偽。(反例: $m=2, n=2$)よって, p は r であるための十分条件であるが, 必要条件ではない。(エ②) $\overline{p} \Rightarrow r$ は偽。(反例: $m=1, n=2$) $r \Rightarrow \overline{p}$ は偽。(反例: $m=1, n=1$)よって, $\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。(オ③)

2

(解説)

 $\triangle ABC$ において, 余弦定理により $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$ すなわち $(\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2})^2 + BC^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} BC \cos 45^\circ$ よって $BC^2 - 4BC + 3 = 0$ すなわち $(BC-1)(BC-3) = 0$ ゆえに $BC = \text{ア} 1$ または $BC = \text{イ} 3$ 以下, $BC=3$ の場合を考える。

$$(1) \quad BD = BC \cos 45^\circ = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{ウ} 3\sqrt{2}}{\text{オ} 2}$$

 $\angle ADC = 90^\circ$ であるから, 辺 AC は $\triangle ADC$ の外接円の直径である。よって, $\angle AEC = 90^\circ$ であるから $\angle AEB = \text{カキ} 90^\circ$ したがって $BE = AB \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ク} 2$ (2) 線分 BO は $\triangle ABC$ の外接円の半径であるから, 正弦定理により

$$2BO = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって } BO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{\text{ケコ} 10}}{\text{サ} 2}$$

$$\frac{BE}{BA} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{BD}{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \div 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに、 $\triangle BDE$ と $\triangle BCA$ において

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC}, \quad \angle ABC \text{ は共通}$$

であるから $\triangle BDE \sim \triangle BCA$

$$\text{よって } \angle BCA = \angle BDE \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{シ} \textcircled{1})$$

$\triangle BDE$ と $\triangle BCA$ の相似比は $1 : \sqrt{2}$ であるから

$$DE = \frac{1}{\sqrt{2}} AC = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\text{スセ} 10}}{\text{ソ} 2}$$

弧 AP に対する円周角は等しいから

$$\angle ACP = \angle ABP \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad (\text{タ} \textcircled{7})$$

また、線分 BP は $\triangle ABC$ の外接円の直径である

から $\angle BCP = \text{チツ} 90^\circ$

$\angle BCA + \angle ACP = \angle BCP$ であるから

$$\angle BCA + \angle ACP = 90^\circ$$

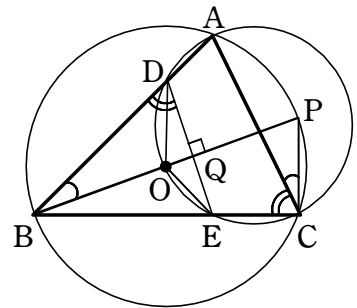
これに $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を代入して $\angle BDE + \angle ABP = 90^\circ$

よって、 $\triangle BQD$ において $\angle BQD = 180^\circ - 90^\circ = \text{テト} 90^\circ$

$$\text{したがって } \triangle BOD + \triangle BOE = \frac{1}{2} BO \cdot DQ + \frac{1}{2} BO \cdot EQ$$

$$= \frac{1}{2} BO (DQ + EQ) = \frac{1}{2} BO \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{10}{8} = \frac{\text{ナ} 5}{\text{ニ} 4}$$



(1) 図1より、2013年の開花日の最大値は135以上である。

よって、2013年のヒストグラムは ア ③

図1より、2017年の開花日の最大値は120以上125未満である。

よって、2017年のヒストグラムは イ ④

(2) ① 2012年の全国の開花日の範囲はおよそ $130 - 81 = 49$ (日)であり、15日より大きい。

よって、正しくない。

② 2013年の北海道地区で一番遅い開花日と南九州地区で一番早い開花日の差はおよそ $136 - 72 = 64$ (日)であり、60日より大きい。

よって、正しくない。

③ 2016年において、南九州地区で一番遅い開花日は第1四分位数より大きい日である。

よって、正しくない。

④ 2017年において、南九州地区で一番遅い開花日は中央値より大きい日である。

よって、正しくない。

⑤ 各年の北海道地区のすべての地点において、開花日は第3四分位数以上の日である。

よって、正しい。

以上から ウ ④

(3) ① 図4より、モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。

よって、正しい。

② 図4より、モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。

よって、正しい。

③ 図4より、モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。

よって、正しい。

④ 図4より、モンシロチョウの初見日の四分位範囲はおよそ $104 - 84 = 20$ (日)

ツバメの初見日の四分位範囲はおよそ $97 - 88 = 9$ (日)

したがって、モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の 3 倍より小さい。

よって、正しい。

- ④ モンシロチョウの初見日の四分位範囲はおよそ 20 日であり、15 日より大きい。
よって、正しくない。

- ⑤ ツバメの初見日の四分位範囲はおよそ 9 日であり、15 日以下である。
よって、正しい。

- ⑥ 図 5 において、原点を通り傾き 1 の直線 (実線) 上にある点が、モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所を表している。

重なった点を考慮すると実線上に少なくとも 4 点あるから、モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所は少なくとも 4 地点ある。

よって、正しい。

- ⑦ 図 5 において、破線は切片が -15 および 15 で傾きが 1 の直線である。

モンシロチョウの初見日を X 、ツバメの初見日を Y とおくと、2 本の破線の方程式は $Y = X + 15$ 、 $Y = X - 15$ である。

図 5 において、直線 $Y = X + 15$ の上側の部分に点があるから、その座標を (x, y) とおくと $y > x + 15$ すなわち $y - x > 15$

したがって、モンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差が 15 日より大きい地点がある。

よって、正しくない。

以上から エ ④, オ ⑦ (または エ ⑦, オ ④)

- (4) X の偏差 $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $\dots$, $x_n - \bar{x}$ の平均値は 0 (カ ⑩)

また、各 x_i に対して $x'_i = \frac{1}{s}x_i - \frac{\bar{x}}{s}$ と書けるから、データ X' の平均値を $\bar{x}'$ 、標準偏差を s' とすると

$$\bar{x}' = \frac{1}{s}\bar{x} - \frac{\bar{x}}{s} = 0 \quad (\text{キ} \text{ ⑩})$$

$$s > 0 \text{ であるから } s' = \left| \frac{1}{s} \right| s = 1 \quad (\text{ク} \text{ ⑪})$$

また、 M' と T' の散布図を考える。

変換 $x'_i = \frac{1}{s}x_i - \frac{\bar{x}}{s}$ において、 $\frac{1}{s} > 0$ であるから、変換後の散布図は、変換前の散布図を縦、横に拡大、縮小および平行移動したものである。

よって、①, ③ は適さない。

また、⑩ において、散布図上のすべての点は M' , T' とともに -1 から 1 の間にある。

したがって、 M' 、 T' ともに偏差の平方の平均値、すなわち分散が1より小さくなり、標準偏差も1より小さくなるから、⑩は適さない。

以上から ケ ②

(5) M と T の相関係数は

$$\frac{(M \text{ と } T \text{ の共分散})}{(M \text{ の標準偏差}) \times (T \text{ の標準偏差})} = \frac{87.9}{12.4 \times 9.78} = 0.7248 \cdots \approx 0.725 \quad (\text{コ ③})$$

【参考】 (偏差の平均値)

一般に、データ X の偏差 $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $\cdots$, $x_n - \bar{x}$ の平均値は、次の計算からわかるように常に0になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) \} &= \frac{1}{n} \{ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\bar{x} \} \\ &= \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \end{aligned}$$

【参考】 (標準化)

一般に、各 x_i について $x_i' = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ と変換することで、変換後のデータの平均値を0、標準偏差を1にすることができる。この操作を標準化という。

5

解説

右図のように、線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積を S_1 , 線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする.

また, $m > 0$ の場合, 線分 OA, OQ と C で囲まれた図形の面積を S_3 , $m < 0$ の場合, 線分 OB, OP と C で囲まれた図形の面積を S_3 とする.

$$S_1 = S_2 \text{ から } S_1 + S_3 = S_2 + S_3$$

$$\text{ゆえに } -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$\text{よって } \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$\alpha, \beta, a, b \text{ は実数であるから } \beta - \alpha = b - a \dots\dots ①$$

$-x^2 + 2x + 1 = 0$ の解が $x = a, b$ ($a < b$) であるから

$$b - a = (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$-x^2 + 2x + 1 = mx$ すなわち $x^2 + (m-2)x - 1 = 0$ の解が $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) であるから

$$\beta - \alpha = \frac{-(m-2) + \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2} - \frac{-(m-2) - \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$$

$$① \text{ に代入すると } \sqrt{m^2 - 4m + 8} = 2\sqrt{2} \dots\dots ②$$

$$\text{ゆえに } m(m-4) = 0$$

$$m \neq 0 \text{ であるから } m = 4$$

これは ② を満たすから適する.

