$\boxed{1}$

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}x+\cos\dfrac{2}{3}x\right)^2$ について考えよう。

(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}x+\cos\dfrac{2}{3}x=\boxed{\text{ア}}\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$ であるから

$$f(x)=\boxed{\text{ウ}}\sin^2\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

である。さらに，2 倍角の公式により

$$f(x)=-\cos\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x+\frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right)+\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表される。

(2)　一般に，$-\cos\theta=\boxed{\text{ク}}$ がすべての $\theta$ に対して成り立つ。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪　$\sin(\theta-\pi)$　　①　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　　②　$\sin\theta$　　③　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

このことと ① により，$f(x)$ は

$$f(x)=\sin\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)+\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

と変形できる。

(3)　② により，関数 $y=f(x)$ のグラフは，$y=\sin\left(\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}x\right)$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{キ}}$ だけ平行移動したものであることがわかる。

また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ である。

(4)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$f(x)=1$ を満たす $x$ は $\boxed{\text{ス}}$ 個ある。その中で最小のものを $\alpha$ とおくと，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

この $\alpha$ に対して $\tan\alpha$ の値を求めよう。$\tan 2\alpha$ を，$\tan\alpha$ を用いて表すと

$\tan 2\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}\ \tan\alpha}{\boxed{\text{タ}} - \tan^2\alpha}$ である。

この式と $\tan\alpha > 0$ により $\tan\alpha = \sqrt{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる。

$\boxed{2}$

一つのさいころを投げて出た目の数を得点とするゲームを行う。このゲームでは，出た目を見て，もう一度だけ投げることもでき，その場合は新たに出た目の数が得点になる。

このゲームの得点を確率変数と考えて，いろいろな場合について，その期待値 (平均) を求めてみよう。

まず，最初に出た目にかかわらずもう一度投げることにした場合に得られる得点を $X$ とすると，確率変数 $X$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

次に，最初に1の目が出たときにはもう一度投げ，2以上の目が出たときにはそのまま得点にすることにした場合に得られる得点を $Y$ とする。$Y=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，$Y=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。$Y=3$，4，5，6 となる確率も考えることによって，確率変数 $Y$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ とわかる。

この値は，$X$ の期待値 $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ より大きくなっている。さらに期待値を大きくする方法を考えてみよう。

一つのさいころを投げることによって $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ 点が得られるとみなしてよいので，最初のさいころの目が $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ より大きいときはそのまま得点にし，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ より小さいときにはもう一度投げるのがよいということがわかる。この場合に得られる得点を $Z$ とすると，確率変数 $Z$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ になる。

$\boxed{3}$

14000 人の生徒に対して，科目 A と科目 B の試験を実施した。試験の点数は正規分布に従うと考え，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

科目 A の平均点は 66.2 点，標準偏差は 15.0 点であった。点数の高い順に順位をつけたとき，この試験で 80 点であった生徒の順位は $\boxed{\text{ア}}$ までにあり，59 点であった生徒の順位は $\boxed{\text{イ}}$ までにある。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓓ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ 1 から 1000 | ① 1001 から 2000 | ② 2001 から 3000 |
| ③ 3001 から 4000 | ④ 4001 から 5000 | ⑤ 5001 から 6000 |
| ⑥ 6001 から 7000 | ⑦ 7001 から 8000 | ⑧ 8001 から 9000 |
| ⑨ 9001 から 10000 | ⓐ 10001 から 11000 | ⓑ 11001 から 12000 |
| ⓒ 12001 から 13000 | ⓓ 13001 から 14000 | |

科目 B の標準偏差は 16.0 点であったが，平均点が発表されなかったので，無作為に選ばれた 196 人の試験の点数をもとに平均点 $m$ を推定することにした。196 人の平均点が 63.5 点であったとき，196 人の点数を十分に大きな標本と考えて $m$ に対する信頼度 (信頼係数) 95 % の信頼区間を求めると，$\boxed{\text{ウエ}}.\boxed{\text{オ}} \leqq m \leqq \boxed{\text{カキ}}.\boxed{\text{ク}}$ となる。小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで答えよ。

$\boxed{4}$

座標平面上の 4 点 A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(2,\ 8)$，D$(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を $R$ とする．また $0<t<4$ に対し，原点 O$(0,\ 0)$，点 E$(4,\ 0)$，および点 P$(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする．

(1) $R$ の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ．

(2) $t$ が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする $t$ の値と，そのときの最大値を求めよ．