中３甲陽PLUS数学　6月17日(水)　　小テスト　　氏名[　　　　　　　　　　　　]　　　　点　8点合格

$\boxed{1}$

点 P(5, 1) から円 $x^2+y^2=13$ に引いた２本の接線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$

２円 $x^2+y^2-4x-5=0$，$x^2+y^2+2y-15=0$ について

(1)　２円は２点で交わることを示せ。

(2)　２円の２つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

(3)　２円の２つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$

２点 A(5, 0)，B(7, -6) と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q とでできる △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=m(x-4)$ は異なる２点 A，B で交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$

$x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq 0$ のとき，$-x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{1}$

解答　$5x+y=13$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　$x^2+y^2-6x-y=0$　　(3)　$2x+y-5=0$

$\boxed{3}$

解答　中心が点 $(4,\ -2)$，半径が 1 の円

$\boxed{4}$

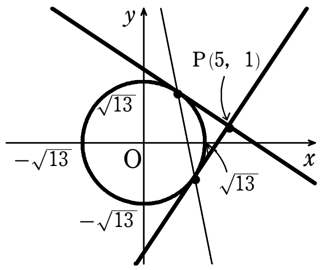
解答　(1)　$m<1$，$9<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分

$\boxed{5}$

解答　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$，$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2

$\boxed{1}$

(解説)



A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=13,\quad x_2x+y_2y=13$$

これらがともに点 P(5, 1) を通るから

$$5x_1+y_1=13 \quad \cdots\cdots ①$$

$$5x_2+y_2=13 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から，2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ は直線 $5x+y=13$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$5x+y=13$

別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=13$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=13$ ……①

点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=13$

これが点 P(5, 1) を通るから　$5x_1+y_1=13$

よって　$y_1=-5x_1+13$ ……②

② を ① に代入して　$x_1{}^2+(-5x_1+13)^2=13$

ゆえに　$26(x_1{}^2-5x_1+6)=0$

これを解いて　$x_1=2,\ 3$

② から　$x_1=2$ のとき　$y_1=3$

$x_1=3$ のとき　$y_1=-2$

よって，A，B の座標は　$(2,\ 3)$，$(3,\ -2)$

したがって，直線 AB の方程式は　$y-3=\dfrac{-2-3}{3-2}(x-2)$

すなわち　$5x+y-13=0$

参考　直線 AB を点 P に関する円の **極線** といい，P を **極** という。

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$x^2+y^2-4x-5=0$ を変形すると　$(x-2)^2+y^2=3^2$

この円の中心は点 (2, 0)，半径は 3

$x^2+y^2+2y-15=0$ を変形すると　$x^2+(y+1)^2=4^2$

この円の中心は点 (0, −1)，半径は 4

よって，2 円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

$4-3<d<4+3$ であるから，2 円は 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-5)+(x^2+y^2+2y-15)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

図形 ① が原点を通るとき　$-5k-15=0$　よって　$k=-3$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2-6x-y=0$

これが求める円の方程式である。

(3)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　$k=-1$

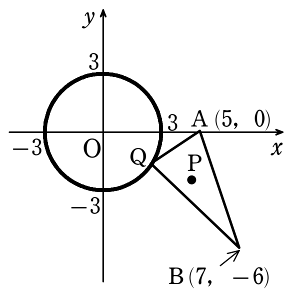
これを ① に代入して整理すると　$2x+y-5=0$

$\boxed{3}$

(解説)

点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる。

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。



Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots ①$$

P は △ABQ の重心であるから

$$x=\frac{5+7+s}{3},\quad y=\frac{0-6+t}{3}$$

よって　$s=3x-12$，$t=3y+6$

これを ① に代入して　$(3x-12)^2+(3y+6)^2=9$

ゆえに　$(x-4)^2+(y+2)^2=1$ ……②

よって，点 P は円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点 P $(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　中心が点 (4, −2)，半径が 1 の円

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$y=x^2-3x$ ……①，　$y=m(x-4)$ ……②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　$x^2-(m+3)x+4m=0$ ……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(m+3)^2-4\cdot1\cdot4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる 2 点 A，B で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$(m-1)(m-9)>0$

よって　$m<1,\ 9<m$ ……④

(2)　A，B の x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は ③ の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+3$$

線分 AB の中点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+3}{2} \quad \cdots\cdots ⑤ \qquad Y=m(X-4) \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤ から　$m=2X-3$ ……⑦

これを ⑥ に代入して　$Y=(2X-3)(X-4)$

よって　$Y=2X^2-11X+12$

また，④，⑦ から　$2X-3<1,\ 9<2X-3$　ゆえに　$X<2,\ 6<X$

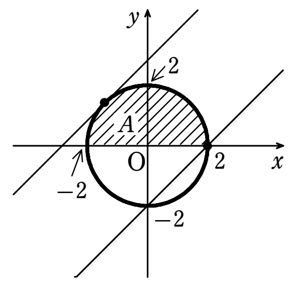
よって，点 P は放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点 P $(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分

$\boxed{5}$

(解説)



連立不等式 $x^2+y^2\leqq4$，$y\geqq0$ の表す領域を A とすると，A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$-x+y=k$ ……① とおくと，① は傾きが 1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=4$ に接するとき，k の値は最大となる。

① から　$y=x+k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して　$x^2+(x+k)^2=4$

整理すると　$2x^2+2kx+k^2-4=0$ ……③

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+8=0$　よって　$k=\pm2\sqrt{2}$

接点が領域 A 上にあるとき　$k=2\sqrt{2}$

このとき，③ から　$x=-\dfrac{k}{2}=-\sqrt{2}$

② から　$y=-\sqrt{2}+k=\sqrt{2}$

また，直線 ① が点 (2, 0) を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=-2+0=-2$

したがって，$-x+y$ は　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2　をとる。