

添削課題 7月1日(水)

1 [学習院大]

大小の2つのさいころを投げて、出た目をそれぞれ a, b とする。このとき、複素数 z を $z = (\sqrt{3} + i)^a (1 - i)^b$ と定める。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) $|z| \leq 8$ となる確率を求めよ。
(2) z の実部と虚部が両方とも正である確率を求めよ。

【解答】 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{7}{36}$

【解説】

さいころの目の出方は全部で $6^2 = 36$ (通り)

また $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $1 - i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

(1) $|z| = 2^a(\sqrt{2})^b = 2^{a+\frac{b}{2}}$ であるから、 $|z| \leq 8$ より $2^{a+\frac{b}{2}} \leq 2^3$

よって $a + \frac{b}{2} \leq 3$ ゆえに $2a + b \leq 6$

これを満たす a, b の組は

$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2)$ の6通り

したがって、求める確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) $\arg z = \frac{\pi}{6}a + \left(-\frac{\pi}{4}\right)b = \frac{2a-3b}{12}\pi$

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$ であるから $-16 \leq 2a - 3b \leq 9$

よって $-\frac{4}{3}\pi \leq \frac{2a-3b}{12}\pi \leq \frac{3}{4}\pi$

ゆえに、 z の実部と虚部が両方とも正であるための条件は

$$0 < \frac{2a-3b}{12}\pi < \frac{\pi}{2}$$

すなわち $0 < 2a - 3b < 6$

これを満たす a, b の組は

$(a, b) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 3), (6, 3)$ の7通り

したがって、求める確率は $\frac{7}{36}$

添削課題 7月1日(水)

2 [東北大]

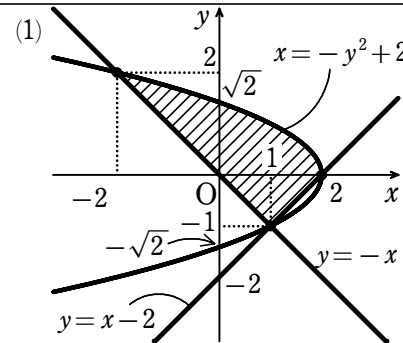
xy 平面内の図形

$$S: \begin{cases} x+y^2 \leq 2 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y = -x$ の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

- (1) S を xy 平面に図示せよ。
(2) V を求めよ。

【解答】 (1) [図], 境界線を含む (2) $\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi$



【解説】

$$(1) \begin{cases} x+y^2 \leq 2 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -y^2 + 2 \\ y \geq -x \\ y \geq x - 2 \end{cases}$$

よって、図形 S は右の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

- (2) 放物線 $x = -y^2 + 2$ と直線 $y = -x$ の 2 つの

交点を $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$ とする。

また、図形 S に含まれる放物線 $x = -y^2 + 2$ 上の点 $P(2-t^2, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) から直線 $y = -x$ に垂線 PH を下ろすと

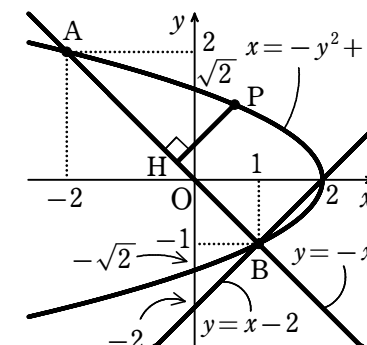
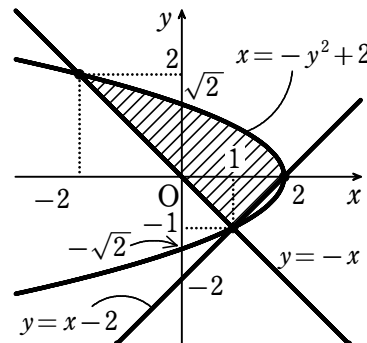
$$\begin{aligned} PH &= \frac{|1 \cdot (2-t^2) + 1 \cdot t|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |-t^2+t+2| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-t^2+t+2) \end{aligned}$$

$$\text{また } AB = \sqrt{2} \{1 - (-2)\} = 3\sqrt{2}$$

よって、 $AH = h$ とおくと $0 \leq h \leq 3\sqrt{2}$

また、点 P を通り直線 $y = -x$ に垂直な直線の方程式は

$$y - t = x - (2 - t^2) \quad \text{すなわち} \quad y = x + t^2 + t - 2$$



よって、点 H の x 座標は、 $x + t^2 + t - 2 = -x$ から

$$x = \frac{1}{2} (-t^2 - t + 2)$$

$$\text{ゆえに } h = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} (-t^2 - t + 2) - (-2) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-t^2 - t + 6)$$

$$\text{よって } dh = -\frac{1}{\sqrt{2}} (2t+1) dt$$

したがって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{3\sqrt{2}} PH^2 dh \\ &= \pi \int_2^0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (-t^2 + t + 2) \right\}^2 \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} (2t+1) \right\} dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (-t^2 + t + 2)^2 (2t+1) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (2t^5 - 3t^4 - 8t^3 + 5t^2 + 12t + 4) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} t^6 - \frac{3}{5} t^5 - 2t^4 + \frac{5}{3} t^3 + 6t^2 + 4t \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{232}{15} = \frac{58\sqrt{2}}{15} \pi \end{aligned}$$

h	$0 \rightarrow 3\sqrt{2}$
t	$2 \rightarrow 0$

1
[学習院大]

大小の2つのさいころを投げて，出た目をそれぞれ a, b とする。このとき，複素数 z を $z=(\sqrt{3}+i)^a(1-i)^b$ と定める。ただし， i は虚数単位である。
 (1) $|z|\leq 8$ となる確率を求めよ。
 (2) z の実部と虚部が両方とも正である確率を求めよ。

2
[東北大]

xy 平面内の図形

$S: \begin{cases} x+y^2 \leq 2 \\ x+y \geq 0 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$

を考える。図形 S を直線 $y = -x$ の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。
(1) S を xy 平面に図示せよ。
(2) V を求めよ。