$\boxed{1}$

実数 a，b，c が

$$a+b+c=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

および

$$a^2+b^2+c^2=13 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，① と ② を用いると

$$ab+bc+ca=\boxed{\text{アイ}}$$

であることがわかる。よって

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=\boxed{\text{ウエ}}$$

である。

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと

$$x+y=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{5}$$

である。また，(1) の計算から

$$x^2+y^2=\boxed{\text{キク}}$$

が成り立つ。

これらより

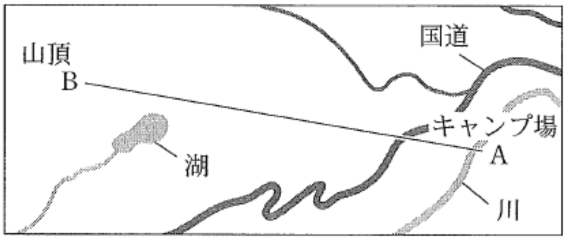
$$(a-b)(b-c)(c-a)=\boxed{\text{ケ}}\sqrt{5}$$

である。

$\boxed{2}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて三角比の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんは，キャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

> 太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。
> 花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図 1 のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。
> 太郎：図 1 の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら 16° だったよ。
> 花子：本当に 16° なの？　図 1 の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

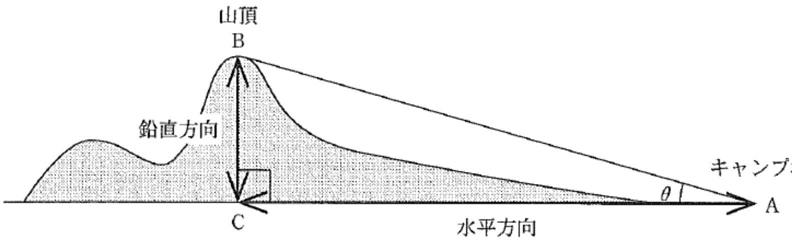


図　1

図 1 の θ はちょうど 16° であったとする。しかし，図 1 の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$ であるのに対して，鉛直方向は $\dfrac{1}{25000}$ であった。

実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である ∠BAC を考えると，

tan ∠BAC は $\boxed{\text{ア}}$. $\boxed{\text{イウエ}}$ となる。したがって，∠BAC の大きさは $\boxed{\text{オ}}$。

ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪　3° より大きく 4° より小さい
①　ちょうど 4° である
②　4° より大きく 5° より小さい
③　ちょうど 16° である。
④　48° より大きく 49° より小さい
⑤　ちょうど 49° である
⑥　49° より大きく 50° より小さい
⑦　63° より大きく 64° より小さい
⑧　ちょうど 64° である
⑨　64° より大きく 65° より小さい

$\boxed{3}$

外接円の半径が 3 である △ABC を考える。 点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

(1)　AB＝5，AC＝4 とする。このとき

$$\sin\angle ABC=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\qquad AD=\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$$

である。

(2)　2 辺 AB，AC の長さの間に 2AB＋AC＝14 の関係があるとする。

このとき，AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{カ}\leqq AB\leqq\boxed{キ}$ であり

$$AD=\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}AB^2+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}AB$$

と表せるので，AD の長さの最大値は $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{4}$

p，q を実数とする。

花子さんと太郎さんは，次の二つの2次方程式について考えている。

$$x^2+px+q=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+qx+p=0 \quad \cdots\cdots ②$$

① または ② を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき，$n=\boxed{\text{ア}}$ である。

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，$n=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

花子：例えば，① と ② をともに満たす実数 x があるときは $n=3$ になりそうだね。

太郎：それを α としたら，$\alpha^2-6\alpha+q=0$ と $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つよ。

花子：なるほど。それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね。

太郎：確かに α の値が求められるけど，実際に $n=3$ となっているかどうかの確認が必要だね。

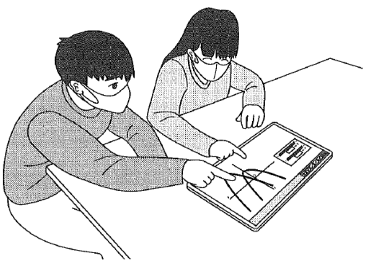
花子：これ以外にも $n=3$ となる場合がありそうだね。

$n=3$ となる q の値は

$q=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$

である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする。

(3)　花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①，② の左辺を y とおいた2次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている。



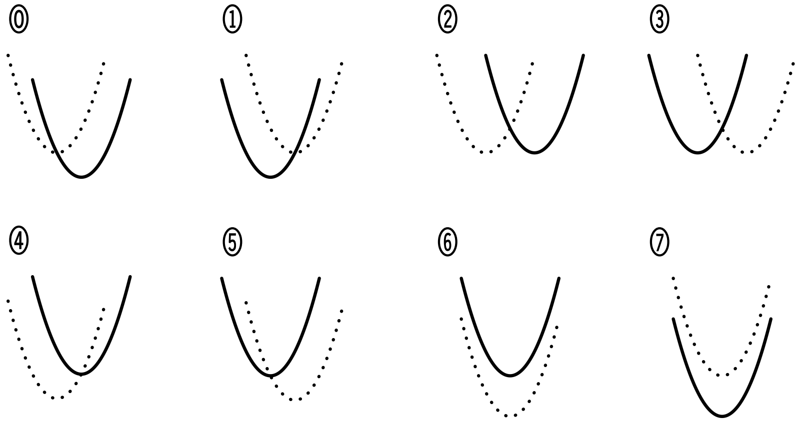
$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$$y=x^2-6x+q \quad \cdots\cdots ③$$
$$y=x^2+qx-6 \quad \cdots\cdots ④$$

の二つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で、q の値を1から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す。このとき，③ のグラフの移動の様子を示すと

$\boxed{\text{オ}}$ となり，④ のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。



(4)　$\boxed{\text{ウ}} < q < \boxed{\text{エ}}$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部分集合 A，B を

$$A = \{x \mid x^2 - 6x + q < 0\}$$
$$B = \{x \mid x^2 + qx - 6 < 0\}$$

とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成り立つ。

- $x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$。
- $x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

5

日本国外における日本語教育の状況を調べるために，独立行政法人国際交流基金では「海外日本語教育機関調査」を実施しており，各国における教育機関数，教員数，学習者数が調べられている。2018 年度において学習者数が 5000 人以上の国と地域 (以下，国) は 29 か国であった。これら 29 か国について，2009 年度と 2018 年度のデータが得られている。

(1)　各国において，学習者数を教員数で割ることにより，国ごとの「教員 1 人あたりの学習者数」を算出することができる。図 1 と図 2 は，2009 年度および 2018 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである。これら二つのヒストグラムから，9 年間の変化に関して，後のことが読み取れる。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

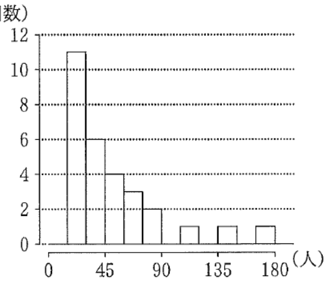


図 1　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

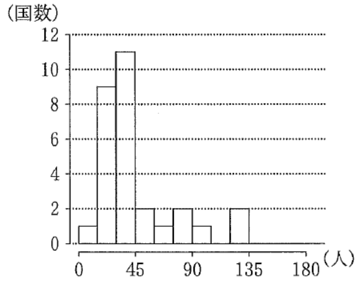


図 2　2018 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

(出典：国際交流基金の Web ページにより作成)

- 2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，［ア］。
- 2009 年度と 2018 年度の第 1 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，［イ］。
- 2009 年度と 2018 年度の第 3 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，［ウ］。
- 2009 年度と 2018 年度の範囲を比較すると，［エ］。
- 2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると，［オ］。

［ア］～［オ］の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　2018 年度の方が小さい
①　2018 年度の方が大きい
②　両者は等しい
③　これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない

(2)　各国において，学習者数を教育機関数で割ることにより，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」も算出した。図 3 は，2009 年度における「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の箱ひげ図である。

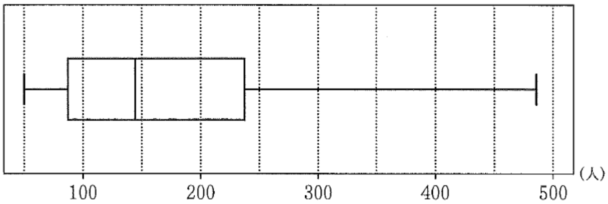


図 3　2009 年度における教育機関 1 機関あたりの学習者数の箱ひげ図

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

2009 年度について，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」(横軸) と「教員 1 人あたりの学習者数」(縦軸) の散布図は $\boxed{\text{カ}}$ である。ここで，2009 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである (1) の図 1 を，図 4 として再掲しておく。

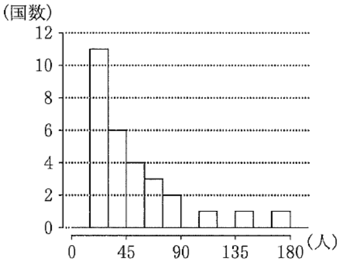


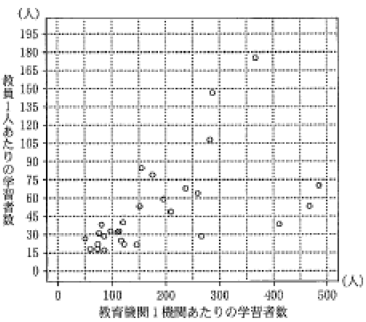
図 4　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

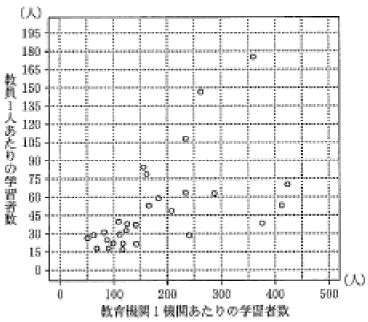
$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。なお，こ

れらの散布図には，完全に重なっている点はない。

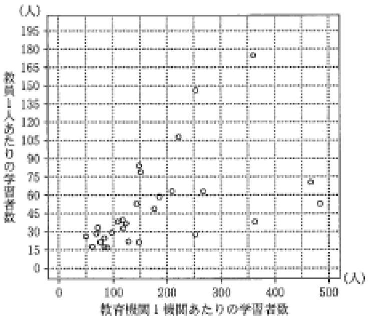
⓪



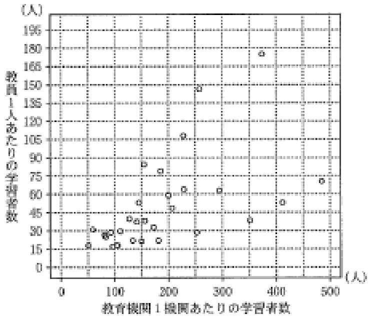
①



②



③



(3)　各国における 2018 年度の学習者数を 100 としたときの 2009 年度の学習者数 S，および，各国における 2018 年度の教員数を 100 としたときの 2009 年度の教員数 T を算出した。

例えば，学習者数について説明すると，ある国において，2009 年度が 44272 人，2018 年度が 174521 人であった場合，2009 年度の学習者数 S は $\dfrac{44272}{174521}\times 100$ より 25.4 と算出される。

表 1 は S と T について，平均値，標準偏差および共分散を計算したものである。ただし，S と T の共分散は，S の偏差と T の偏差の積の平均値である。

表 1 の数値が四捨五入していない正確な値であるとして，S と T の 相関係数を求めると $\boxed{キ}.\boxed{クケ}$ である。

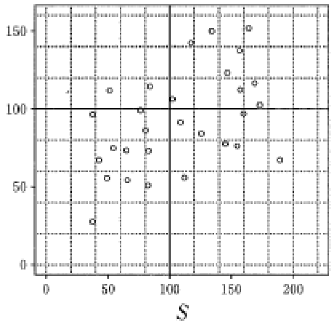
表 1　平均値，標準偏差および共分散

Sの平均値	Tの平均値	Sの標準偏差	Tの標準偏差	SとTの共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

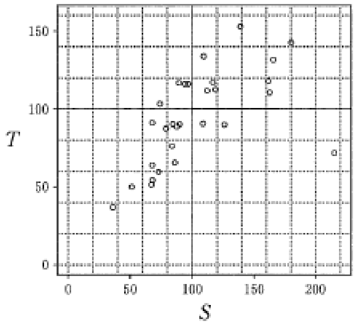
(4)　表 1 と (3) で求めた相関係数を参考にすると，(3) で算出した 2009 年度の S(横軸) と T(縦軸) の散布図は $\boxed{コ}$ である。

$\boxed{\boxed{\text{コ}}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

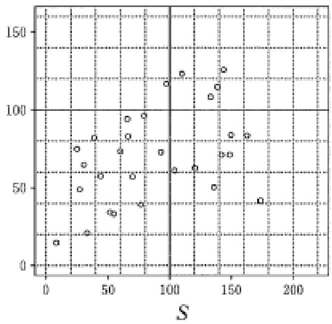
⓪



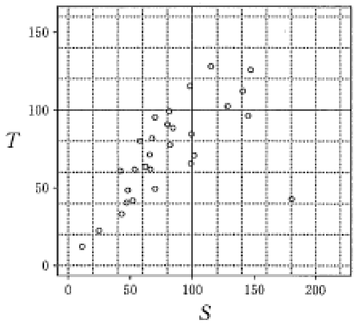
①



②



③



$\boxed{6}$

複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の**手順**で行う。

手順

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果，1人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

(1)　2人または3人で交換会を開く場合を考える。

(i)　2人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。したがって，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(ii)　3人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。したがって，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(iii)　3人で交換会を開く場合，4回以下の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(2)　4人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了する確率を次の**構想**に基づいて求めてみよう。

構想

1回目の交換で交換会が**終了しない**プレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

1回目の交換で，4人のうち，ちょうど1人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{サ}}$ 通りあり，ちょうど2人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{シ}}$ 通りある。このように考えていくと，1回目のプレゼントの受け取り方のうち，1回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

したがって，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(3)　5人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

(4)　A，B，C，D，Eの5人が交換会を開く。1回目の交換でA，B，C，Dがそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

$\boxed{7}$

$\triangle$ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P，直線 DF と辺 AC の交点を Q とする。

(1)　点 D は線分 AG の中点であるとする。このとき，$\triangle$ABC の形状に関係なく

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。また，点 F の位置に関係なく

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ウ}}\times\frac{\boxed{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\boxed{\text{オ}}}},\qquad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{カ}}\times\frac{\boxed{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\boxed{\text{ク}}}}$$

であるので，つねに

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{ケ}}$$

となる。

$\boxed{\boxed{\text{エ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{ク}}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　BC	①　BF	②　CF	③　EF
④　FP	⑤　FQ	⑥　PQ	

(2)　AB＝9，BC＝8，AC＝6 とし，(1) と同様に，点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで，4 点 B，C，Q，P が同一円周上にあるように点 F をとる。

このとき，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\mathrm{AP}$ であるから

$$\mathrm{AP}=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}},\qquad \mathrm{AQ}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

であり

$$\mathrm{CF}=\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。

(3)　$\triangle$ABC の形状や点 F の位置に関係なく，つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ となるのは，

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときである。