

1

10本のくじがあって、そのうちの2本が当たりくじである。このくじを同時に5本引くとき、当たりくじの本数を X とすると、 $X=0, 1, 2$ となる確率は、それぞれ ア , イ , ウ である。よって、確率変数 X の期待値は エ , 分散は オ , 標準偏差は カ である。

2

トランプのカードが n 枚 ($n \geq 3$) あり、その中の2枚はハートで残りはスペードである。これらのカードをよく切って裏向けに積み重ねておき、上から順に1枚ずつめくっていくことにする。初めてハートのカードが現れるのが X 枚目であるとき

- (1) $X=k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) となる確率 p_k を求めよ。
- (2) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

3

1個のさいころを2回続けて投げるとき、次の3つの事象 A, B, C は独立であるか。

- A : 1回目に偶数の目が出る。 B : 2回目に奇数の目が出る。
 C : 1回目と2回目の目の和が奇数である。

4

原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。 P は、硬貨を投げて表が出たら $+3$ だけ移動し、裏が出たら -2 だけ移動する。硬貨を3回投げ終わったときの表の出た回数を X 、点 P の座標を T とする。

- (1) T を X で表せ。
- (2) T の期待値と分散を求めよ。

5

袋の中に白球が1個、赤球が2個、青球が3個入っている。この袋から、もとに戻さずに1球ずつ2個の球を取り出すとき、取り出された赤球の数を X 、取り出された青球の

数を Y とする。このとき、 X, Y の同時分布を求めよ。

6

1つの面には1、2つの面には2、3つの面には3が書かれているさいころを2回投げて、1回目に出た目の数を十の位、2回目に出た目の数を一の位として得られる2桁の数を X とする。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) X の期待値と分散を求めよ。

7

A, B の2人が、白玉2個と赤玉3個の入っている袋から、 A, B の順に玉を1個ずつ取り出していき、最初に白玉を取り出した人を勝ちとする。ただし、取り出した玉はもとに戻さないものとする。この勝負を20回行うとき、 A が勝つ回数 X の期待値と標準偏差を求めよ。

8

m を正の整数とする。 $P=m^3-4m^2-4m-5$ が素数となるとき、 P の値を求めよ。

9

n を自然数とする。 $2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて答えよ。

10

$x+2y+3z=2xyz$ ($x \leq y \leq z$) を満たす自然数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

11

$x^2+6y^2=360$ を満たす正の整数 x, y の組を求めよ。

12

$\frac{1}{m} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{10}$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

13

$x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$ を満たす正の整数 x, y の組を求めよ。

14

$\sqrt{n^2 + 11n - 8}$ が整数となるような正の整数 n をすべて求めよ。

15

$\frac{n^2 + 7n + 12}{n + 1}$ が整数になるような自然数 n をすべて求めよ。

1

解答 (ア) $\frac{2}{9}$ (イ) $\frac{5}{9}$ (ウ) $\frac{2}{9}$ (エ) 1 (オ) $\frac{4}{9}$ (カ) $\frac{2}{3}$

2

解答 (1) $\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$ (2) $E(X) = \frac{n+1}{3}, V(X) = \frac{1}{18}(n+1)(n-2)$

3

解答 独立でない

4

解答 (1) $T=5X-6$ (2) 期待値 $\frac{3}{2}$, 分散 $\frac{75}{4}$

5

解答

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2	計
0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$
計	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

6

解答

(1)

X	11	12	13	21	22	23	31	32	33	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(2) 期待値 $\frac{77}{3}$, 分散 $\frac{505}{9}$

7

解答 期待値 12, 標準偏差 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$

8

解答 $P=43$

9

解答 1, 2, 5, 10

10

解答 $(x, y, z) = (1, 2, 5)$

11

解答 $(x, y) = (12, 6)$

12

解答 $(m, n) = (5, 5), (8, 20), (9, 45)$

13

解答 $(x, y) = (2, 1), (3, 3), (2, 4)$

14

解答 $n = 1, 8, 33$

15

解答 $n = 1, 2, 5$

1

X のとりうる値は 0, 1, 2 である。それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_0 \times {}_8C_5}{{}_{10}C_5} = {}^{\text{ア}} \frac{2}{9} \quad P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_8C_4}{{}_{10}C_5} = {}^{\text{イ}} \frac{5}{9}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_8C_3}{{}_{10}C_5} = {}^{\text{ウ}} \frac{2}{9}$$

よって, X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

ゆえに

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{9}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{2}{9} + 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{9}$$

したがって

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{13}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

別解 $[V(X)$ の求め方]

$$V(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{2}{9} + (1-1)^2 \cdot \frac{5}{9} + (2-1)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

2

- (1) p_k は、 k 枚目に初めてハートが現れ、それまではすべてスペードが現れる確率であるから

$$p_k = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \cdot \frac{2}{n-(k-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

$$(2) E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{6} n(n+1) \{3n - (2n+1)\} = \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot (n-1) = \frac{n+1}{3}$$

$$\text{また } E(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 p_k = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ n \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \right\} = \frac{n(n+1)}{6}$$

$$\text{よって } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} n(n-2)$$

3

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

目の和が奇数になるのは、

奇数+偶数 または 偶数+奇数

のときであるから

$$P(C) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{また } P(A \cap B \cap C) = \frac{3 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

ゆえに、3つの事象 A, B, C は独立でない。

4

- (1) 表の出た回数が X のとき、裏の出た回数は $3-X$ であるから

$$T = 3X - 2(3-X) = 5X - 6$$

- (2) X のとりうる値は 0, 1, 2, 3 である。それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

よって

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

したがって

$$E(T) = E(5X-6) = 5E(X) - 6 = 5 \cdot \frac{3}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

$$V(T) = V(5X - 6) = 5^2 V(X) = 25 \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$$

5

[1] 白球1個, 赤球1個を取り出すとき, $X=1, Y=0$ で

$$P(X=1, Y=0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

[2] 白球1個, 青球1個を取り出すとき, $X=0, Y=1$ で

$$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

[3] 赤球2個を取り出すとき, $X=2, Y=0$ で

$$P(X=2, Y=0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

[4] 赤球1個, 青球1個を取り出すとき, $X=Y=1$ で

$$P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

[5] 青球2個を取り出すとき, $X=0, Y=2$ で

$$P(X=0, Y=2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

[1]~[5] から, X, Y の同時分布は次の表ようになる。

$Y \backslash X$	0	1	2	計
0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$
計	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

6

(1) X のとりうる値は 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 である。

また, それぞれの値をとる確率は

$$P(X=11) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=13) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=21) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=22) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=23) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$$

$$P(X=31) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=32) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36}$$

$$P(X=33) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

よって, X の確率分布は次の表ようになる。

X	11	12	13	21	22	23	31	32	33	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(2) 1回目, 2回目に出た目の数を, それぞれ Y, Z とすると $X=10Y+Z$

$$E(Y) = E(Z) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\text{よって } E(X) = E(10Y+Z) = 10E(Y) + E(Z) = 10 \cdot \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{77}{3}$$

$$\text{また } E(Y^2) = E(Z^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{3}{6} = 6$$

$$\text{ゆえに } V(Y) = V(Z) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

 Y と Z は互いに独立であるから

$$V(X) = V(10Y+Z) = 10^2 V(Y) + V(Z) = 100 \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{505}{9}$$

【参考】 (1) で求めた X の確率分布を用いて, $E(X), V(X)$ を求める方法も考えられるが, これは計算が非常に煩雑になる。

7

1回の勝負で A が勝つのは, 玉の出方が (白), (赤, 赤, 白) の場合であるから,

$$\text{その確率は } \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

よって、 X は二項分布 $B\left(20, \frac{3}{5}\right)$ に従うから

$$E(X) = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12 \quad \sigma(X) = \sqrt{20 \cdot \frac{3}{5} \left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

8

$$P = m^3 - 4m^2 - 4m - 5 \text{ から } P = (m-5)(m^2 + m + 1) \dots\dots ①$$

m が正の整数であることから、 $m-5$ 、 $m^2 + m + 1$ も整数であり

$$m-5 \geq -4, \quad m^2 + m + 1 \geq 3$$

よって、 P が素数であるとき、① より $m-5=1$ 、 $m^2 + m + 1 = P$

これを解くと $m=6$ 、 $P=43$ このとき、 P は確かに素数となる。

9

2数 A 、 B の最大公約数を (A, B) で表すと、 $2n^2 + n + 4 = (n+2)(2n-3) + 10$ であるから、ユークリッドの互除法により $(2n^2 + n + 4, n+2) = (n+2, 10)$

$n+2 > 2$ より、 $n+2$ と 10 の最大公約数として

考えられる数は 1, 2, 5, 10

別解 $2n^2 + n + 4$ と $n+2$ の最大公約数を g とすると、互いに素な自然数 a 、 b を用いて $2n^2 + n + 4 = ga \dots\dots ①$ 、 $n+2 = gb \dots\dots ②$ と表される。

$$② \text{ から } n = gb - 2$$

$$\text{これを } ① \text{ に代入して } 2(gb-2)^2 + (gb-2) + 4 = ga$$

$$\text{すなわち } g(a+7b-2gb^2) = 10$$

$a+7b-2gb^2$ は整数であるから、 g は 10 の約数でなければならない。

$$g \geq 1 \text{ であるから } g = 1, 2, 5, 10$$

$$\text{逆に、このとき、} ①, ② \text{ から } a = \frac{2n^2 + n + 4}{g}, \quad b = \frac{n+2}{g}$$

[1] $g=1$ のとき

$n=1$ とすると、 $a=7$ 、 $b=3$ となり、 a 、 b は互いに素な自然数であるから、適する。

[2] $g=2$ のとき

$n=2$ とすると、 $a=7$ 、 $b=2$ となり、 a 、 b は互いに素な自然数であるから、適する。

[3] $g=5$ のとき

$n=3$ とすると、 $a=5$ 、 $b=1$ となり、 a 、 b は互いに素な自然数であるから、適する。

[4] $g=10$ のとき

$n=8$ とすると、 $a=14$ 、 $b=1$ となり、 a 、 b は互いに素な自然数であるから、適する。

以上から、求める最大公約数は 1, 2, 5, 10

10

$$x \leq y \leq z \text{ から } x+2y+3z \leq z+2z+3z=6z$$

$$\text{よって、} x+2y+3z=2xyz \text{ から } 2xyz \leq 6z$$

$$z > 0 \text{ から } xy \leq 3$$

x 、 y は自然数で、 $x \leq y$ であるから $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$

[1] $(x, y) = (1, 1)$ のとき

$$\text{等式は } 3+3z=2z \quad \text{よって } z=-3$$

z は自然数であるから、不適。

[2] $(x, y) = (1, 2)$ のとき

$$\text{等式は } 5+3z=4z \quad \text{よって } z=5$$

このとき、 $x \leq y \leq z$ は満たされる。

[3] $(x, y) = (1, 3)$ のとき

$$\text{等式は } 7+3z=6z \quad \text{よって } z=\frac{7}{3}$$

z は自然数であるから、不適。

以上から $(x, y, z) = (1, 2, 5)$

11

$$x^2 = 6(60 - y^2) \dots\dots ① \text{ とおく。}$$

よって、 x^2 は 6 の倍数である。

ゆえに、 x も 6 の倍数である。

よって、 $x=6k$ (k は正の整数) と表される。

$$① \text{ に代入して整理すると } 6k^2 = 60 - y^2$$

$$\text{ゆえに } y^2 = 6(10 - k^2) \dots\dots ②$$

よって、 y^2 は 6 の倍数であるから y も 6 の倍数である。

ゆえに、 $y=6l$ (l は正の整数) と表される。

$$② \text{ に代入して整理すると } 6l^2 = 10 - k^2$$

よって、 $10-k^2$ は6の倍数、かつ $10-k^2 > 0$

ゆえに $k=2$

このとき $l=1$

以上から $(x, y)=(12, 6)$

[12]

両辺に $10mn$ を掛けると $10n-5m=mn$

よって $(m-10)(n+5)=-50$

m, n は自然数であるから、 $m-10, n+5$ は整数であり

$$m-10 \geq 1-10 = -9 \quad n+5 \geq 1+5 = 6$$

よって $(m-10, n+5)=(-5, 10), (-2, 25), (-1, 50)$

ゆえに $(m, n)=(5, 5), (8, 20), (9, 45)$

[13]

$$x^2 - xy + y^2 - 3y = 0 \quad \dots\dots ①$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-y)^2 - 4(y^2 - 3y) = -3y^2 + 12y = -3y(y-4)$$

①の解は整数(実数)であるから $D \geq 0$

よって $-3y(y-4) \geq 0$

ゆえに $0 \leq y \leq 4$

y は正の整数であるから $y=1, 2, 3, 4$

[1] $y=1$ のとき

①は $x^2 - x - 2 = 0$ であるから $x=2, -1$

[2] $y=2$ のとき

①は $x^2 - 2x - 2 = 0$ であるから $x=1 \pm \sqrt{3}$

[3] $y=3$ のとき

①は $x^2 - 3x = 0$ であるから $x=0, 3$

[4] $y=4$ のとき

①は $x^2 - 4x + 4 = 0$ であるから $x=2$

以上から、 x, y がともに正の整数となるものは $(x, y)=(2, 1), (3, 3), (2, 4)$

[14]

$\sqrt{n^2 + 11n - 8}$ が整数となるとき、 k を整数として $\sqrt{n^2 + 11n - 8} = k$ と表される。

両辺を2乗して $n^2 + 11n - 8 = k^2$

$$\text{よって} \quad \left(n + \frac{11}{2}\right)^2 - k^2 = \frac{153}{4}$$

$$\text{両辺に4を掛けて} \quad 4\left(n + \frac{11}{2}\right)^2 - 4k^2 = 153$$

$$\text{すなわち} \quad (2n+11)^2 - (2k)^2 = 153$$

$$\text{よって} \quad (2n+2k+11)(2n-2k+11) = 3^2 \cdot 17$$

$$n \geq 1, k \geq 0 \text{ より} \quad 2n+2k+11 > 0$$

$$\text{さらに} \quad 2n+2k+11 \geq 2n-2k+11$$

$$\text{ゆえに} \quad (2n+2k+11, 2n-2k+11) = (17, 9), (51, 3), (153, 1)$$

$$\text{すなわち} \quad (n, k) = (1, 2), (8, 12), (33, 38)$$

したがって $n=1, 8, 33$

[15]

$$\frac{n^2 + 7n + 12}{n+1} = \frac{(n+6)(n+1)+6}{n+1} = n+6 + \frac{6}{n+1}$$

n は自然数より、 $\frac{n^2 + 7n + 12}{n+1}$ が整数となるための必要十分条件は、 $\frac{6}{n+1}$ が整数となることである。

$$n+1 \geq 2 \text{ から, } \frac{6}{n+1} \text{ が整数となるような } n \text{ は} \quad n+1=2, 3, 6$$

よって $n=1, 2, 5$