$\boxed{1}$★

⑴　四角形 ABCD∽四角形 HGFE

⑵　(ア)　辺 AD と対応する辺は　辺 HE

　(イ)　辺 FG と対応する辺は　辺 CB

　(ウ)　∠B と対応する角は　$\angle G$

　(エ)　$\angle H$ と対応する角は　∠A

$\boxed{2}$★

⑴　２つの三角形の対応する辺の長さの比は，BC：EF＝5：8 であるから，
相似比は　5：8

⑵　⑴ より，相似比は 5：8 であるから　　AB：DE＝5：8

DE＝x cm とすると　$4 : x = 5 : 8$　　　これを解くと　$x=\frac{32}{5}$

よって　　DE＝$\frac{32}{5}$ cm

⑶　相似な図形では，対応する角の大きさは等しいから　　∠C＝∠F＝47°

$\boxed{3}$★

①　△ABC と △PRQ において

AB：PR＝8：4＝2：1,

BC：RQ＝6：3＝2：1,

CA：QP＝9：4.5＝2：1

3 組の辺の比がすべて等しいから　△ABC∽△PRQ

②　△DEF と △OMN において

DF：ON＝6：3＝2：1,

EF：MN＝4：2＝2：1,

∠F＝∠N＝60°

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△DEF∽△OMN

③　△GHI において

∠H＝180°－(70°＋50°)＝60°

△GHI と △LKJ において

∠I＝∠J＝50°，∠H＝∠K＝60°

2 組の角がそれぞれ等しいから　△GHI∽△LKJ

$\boxed{4}$★★

⑴　△ACE と △BDE において

AE：BE＝CE：DE＝1：2

∠AEC＝∠BED (対頂角)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ACE∽△BDE

⑵　△ADE と △ACB において

∠DAE＝∠CAB (共通)

∠ADE＝∠ACB＝60°

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ADE∽△ACB

⑶　△ABD と △CBA において

CB＝9＋3＝12　であるから

AB：CB＝BD：BA＝1：2

また　　　　∠ABD＝∠CBA (共通)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△CBA

$\boxed{5}$★★

⑴　△ABC と △AED において

∠ABC＝∠AED

∠BAC＝∠EAD (共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

相似な三角形の対応する辺の長さの比は等しいから

AB：AE＝AC：AD

$(6+x) : 9 = 12 : 6$

これを解いて　　　　$x=12$

⑵　△ABD と △ACB において

AB：AC＝AD：AB＝3：4　……①

∠BAD＝∠CAB (共通)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△ACB

① より，相似比は 3：4 であるから

BD：CB＝3：4

$x : 18 = 3 : 4$

これを解いて　　　　$x=\frac{27}{2}$

$\boxed{6}$★

△ABC と △EDC において

仮定より　∠BCA＝∠DCE　……①

また，BA＝BE より　　∠BAC＝∠BEA

対頂角は等しいから　　∠BEA＝∠DEC

よって　　∠BAC＝∠DEC　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△ABC∽△EDC

$\boxed{7}$★★★

△ABC と △AED において

∠ACB＝∠ADE (仮定)

∠CAB＝∠DAE (共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

したがって，AB：AE＝AC：AD であるから

AD：AE＝AC：AB　　……①

△ADC と △AEB において

∠CAD＝∠BAE (共通)　……②

①，② より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ADC∽△AEB

$\boxed{8}$★★

⑴　△BFD と △CEF において

△ABC は正三角形であるから

∠DBF＝∠FCE＝60°　……①

△BFD において，内角と外角の関係から

∠BDF＋∠DBF＝∠DFC

よって　∠BDF＋∠DBF＝∠CFE＋∠DFE

∠DBF＝∠DFE＝60° であるから

∠BDF＝∠CFE　　　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△BFD∽△CEF

⑵　△FED をもどすと △AED と重なるから

AD＝FD＝14 cm

よって　　　AB＝14＋16＝30 (cm)

△ABC は正三角形であるから

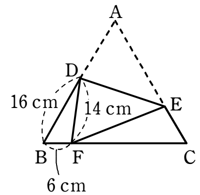
AC＝BC＝AB＝30 cm

△BFD∽△CEF より　BD：CF＝BF：CE

16：(30－6)＝6：CE

よって　　　　　　CE＝9 cm

したがって　　　　AE＝30－9＝21 (cm)



$\boxed{9}$★

⑴　AB：BD＝AC：CE

$9 : x = 12 : 8$

$12x = 72$

よって　　$x=6$

また　AC：AE＝BC：DE

$12 : 20 = 6 : y$

$12y = 120$

よって　　$y=10$

⑵　AD：AB＝DE：BC

$16 : 20 = 24 : x$

$16x = 480$

よって　　$x=30$

また　AD：AB＝AE：AC

$16 : 20 = y : 15$

$20y = 240$

よって　　$y=12$

$\boxed{10}$★

⑴　$\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$5 : x = 4 : 8$

よって　　$x=10$

⑵　$\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$4 : (9-4) = x : 4$

よって　　$x=\frac{16}{5}$

⑶　$\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$20 : 16 = (x-20) : 20$

$20 \times 20 = 16 \times (x-20)$

よって　　$x=45$

11 ★★

BE∥CF であるから

BE：CF＝AE：AF

よって　　x：6＝AE：AF　　……①

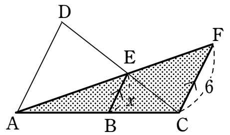
AD∥CF であるから

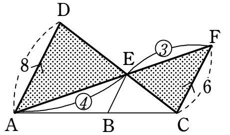
AE：EF＝AD：FC

よって　　AE：EF＝8：6＝4：3　……②

①，②から　x：6＝4：(4＋3)

これを解くと　$x=\dfrac{24}{7}$　答





12 ★★

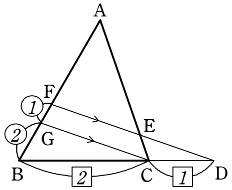
C を通り DF に平行に引いた直線と AB との交点を G とする。

CG∥DF であるから　BG：GF＝BC：CD＝2：1

よって　　GF$=\dfrac{1}{3}$BF$=\dfrac{2}{3}$ (cm)

FE∥GC であるから

AE：EC＝AF：FG＝3：$\dfrac{2}{3}$＝9：2　答



参考　メネラウスの定理を利用すると，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\times\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$ が成り立つことから

$$\frac{6}{2}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\times\frac{3}{2}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{2}{9}$ から　　AE：EC＝9：2

13 ★

(1)　BF＝6－4＝2 (cm)

AB∥EF，AE∥BF であるから，四角形 ABFE は平行四辺形である。

よって　　AE＝BF＝2 cm

AE∥FC であるから　AG：GC＝AE：FC

したがって　　AG：GC＝2：4＝1：2

(2)　EF＝AB＝4 cm

AE∥FC であるから　EG：GF＝AE：FC

よって　　EG：GF＝1：2

したがって，EG$=\dfrac{1}{1+2}$EF$=\dfrac{1}{3}$EF であるから　EG$=\dfrac{1}{3}\times4=\dfrac{4}{3}$ (cm)

14 ★★

辺 DA の延長と線分 CE の延長の交点を H とする。

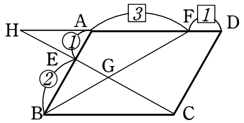
HF∥BC であるから　　FG：GB＝HF：BC

HA∥BC であるから　　HA：BC＝AE：EB＝1：2

ここで，辺 BC の長さを a とすると　　HA$=\dfrac{1}{2}a$

また，AD＝BC であるから　AF$=\dfrac{3}{4}a$

よって　HF＝HA＋AF$=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{3}{4}a=\dfrac{5}{4}a$



したがって　FG：GB＝HF：BC$=\dfrac{5}{4}a$：a＝5：4　答

15 ★

(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC

5：x＝10：8

x×10＝5×8

よって　　x＝4

(2)　△ABC において，AD は ∠A の外角の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC

(5＋x)：x＝8：6

(5＋x)×6＝x×8

よって　　x＝15

16 ★

(1)　△CBD において，点 E，F は，それぞれ辺 CD，CB の中点であるから，中点連結定理により

EF∥BD　……①

EF$=\dfrac{1}{2}$BD

よって　　BD＝2EF＝16 (cm)

(2)　△AEF において，①より DG∥EF であるから

DG：EF＝AD：AE＝1：2

よって　　DG$=\dfrac{1}{2}$EF＝4 (cm)

17 ★★

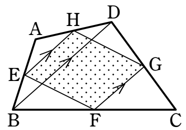
B と D を結ぶ。

△ABD において，中点連結定理により

EH∥BD，EH$=\dfrac{1}{2}$BD

△CDB において，中点連結定理により

FG∥BD，FG$=\dfrac{1}{2}$BD



したがって　　EH∥FG，　EH＝FG

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 EFGH は平行四辺形である。　答

18 ★★

△ADF∽△ABC であり，相似比は　　AF：AC＝6：(6＋8)＝3：7

よって　　　△ADF：△ABC＝3^2：7^2＝9：49

したがって　　△ADF$=\dfrac{9}{49}$△ABC$=\dfrac{9}{49}\times98=18$ (cm^2)

また，△FEC∽△ABC であり，相似比は　　FC：AC＝8：(6＋8)＝4：7

よって　　　△FEC：△ABC＝4^2：7^2＝16：49

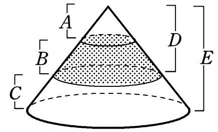
したがって　　△FEC$=\dfrac{16}{49}$△ABC$=\dfrac{16}{49}\times98=32$ (cm^2)

よって　　　(四角形 BEFD)＝△ABC－△ADF－△FEC＝98－18－32＝48 (cm^2)

19 ★★

3 等分された立体を，上から順に A，B，C とする。

また，A と B を合わせた円錐を D，もとの円錐を E とする。



$A\backsim D$ で，相似比は 1：2 であるから

(A の体積)：(D の体積)＝1^3：2^3＝1：8　……①

$A\backsim E$ で，相似比は 1：3 であるから

(A の体積)：(E の体積)＝1^3：3^3＝1：27

E の体積が 54π cm^3 であるから

(A の体積)$=\dfrac{1}{27}\times$(E の体積)$=\dfrac{1}{27}\times54\pi=2\pi$ (cm^3)

よって，①から

(D の体積)＝8×(A の体積)＝8×2π＝16π (cm^3)

したがって　　(B の体積)＝(D の体積)－(A の体積)

＝$16\pi-2\pi=14\pi$ (cm^3)

1

(1)　四角形 ABCD∽四角形 ILKJ

(2)　(ア)　辺 AB と対応する辺は　辺 EF

(イ)　∠G と対応する角は　∠C

2

(1)　2 つの四角形の対応する辺の長さの比は，BC：FG＝10：5＝2：1 であるから，

相似比は　2：1

(2)　(1) より，相似比は 2：1 であるから　　CD：GH＝2：1

GH＝x cm とすると　8：x＝2：1　　　これを解くと　x＝4

よって　　GH＝4 cm

(3)　相似な図形では，対応する角の大きさは等しいから　∠H＝∠D

ここで，四角形 ABCD において

∠D＝360°－(104°＋90°＋107°)＝59°

よって　　∠H＝59°

3

[1]　△ABC と △XWV において

AB：XW＝2：3,　　CA：VX＝3：4.5＝2：3,　　∠A＝∠X＝70°

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　　△ABC∽△XWV

[2]　△DEF と △TSU において

DE：TS＝4：6＝2：3,　　EF：SU＝6：9＝2：3,　　FD：UT＝8：12＝2：3

3 組の辺の比がすべて等しいから　　△DEF∽△TSU

[3]　△GHI において　　∠G＝180°－(78°＋50°)＝52°

△GHI と △PQR において

∠G＝∠P＝52°,　　∠I＝∠R＝50°

2 組の角がそれぞれ等しいから　　△GHI∽△PQR

(△JKL と △MNO は，どの三角形とも相似でない)

4

(1)　△ABE と △DCE において

AE：DE＝BE：CE＝3：1,

∠AEB＝∠DEC (対頂角)

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△ABE∽△DCE

(2)　△ABC と △ADB において AC＝4＋5＝9 (cm) であるから

AB：AD＝AC：AB＝3：2

また　∠BAC＝∠DAB (共通)

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△ABC∽△ADB

(3)　△ABC と △AED において

∠BAC＝∠EAD (共通)

∠ABC＝∠AED＝40°

2 組の角がそれぞれ等しいから　△ABC∽△AED

5

(1)　△AEC と △BED において

AE：BE＝6：12＝1：2

CE：DE＝4：8＝1：2

∠AEC＝∠BED

よって，2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから

△AEC∽△BED

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

AC：BD＝1：2

5：x＝1：2

x×1＝5×2

よって　　　x＝10

(2)　△ADE と △ABC において

∠ADE＝∠ABC

∠DAE＝∠BAC　(共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ADE∽△ABC

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

DE：BC＝AE：AC

6：x＝8：(8＋4)

6：x＝2：3

x×2＝6×3

よって　　　x＝9

(3)　△ABC と △AED において

∠ABC＝∠AED

∠BAC＝∠EAD　(共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

AB：AE＝AC：AD

(4＋x)：6＝8：4

(4＋x)×4＝6×8

4＋x＝6×2

よって　　　x＝8

(4)　△ABC と △DAC において

AC：DC＝24：16＝3：2

BC：AC＝36：24＝3：2

∠ACB＝∠DCA　(共通)

よって，2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから

△ABC∽△DAC

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

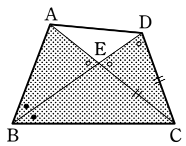
AB：DA＝3：2

21：x＝3：2

3x＝21×2

よって　　　x＝14

6



△ABE と △CBD において

仮定より　　　∠ABE＝∠CBD　…… ①

また，CD＝CE であるから，二等辺三角形 CDE の底角

について　　　∠CED＝∠CDB　…… ②

対頂角は等しいから

∠AEB＝∠CED　…… ③

②，③ より　　∠AEB＝∠CDB　…… ④

①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△ABE∽△CBD　終

7

証明　△AEB と △ADC において

∠AEB＝∠ADC,　　∠EAB＝∠DAC　(共通)

2 組の角がそれぞれ等しいから　　△AEB∽△ADC　…… ①

△ABC と △AED において

① から　　AB：AC＝AE：AD

よって　　AB：AE＝AC：AD

また　　　∠CAB＝∠DAE　(共通)

したがって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED　終

8

(1)　△ACQ と △QBP において

∠ACQ＝∠QBP＝60°　　　…… ①

△ACQ において，内角と外角の関係から

∠CAQ＋∠ACQ＝∠BQA

∠CAQ＋60°＝∠BQP＋60°

よって　　　　∠CAQ＝∠BQP　…… ②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△ACQ∽△QBP

(2)　BQ＝4 cm であるから　　CQ＝10－4＝6 (cm)

△ACQ∽△QBP から　　　CQ：BP＝CA：BQ

6：BP＝10：4　　　　よって　BP＝2.4 cm

9

(1) DE∥BC より

$AD : DB = AE : EC$

$6 : 3 = 4 : x$

$6 \times x = 3 \times 4$

よって　$x = 2$

また　$AD : AB = DE : BC$

$6 : 9 = y : 8$

$9 \times y = 6 \times 8$

よって　$y = \dfrac{16}{3}$

(2) DE∥BC より

$AB : AD = BC : DE$

$x : (x+6) = 12 : 18$

$x \times 18 = (x+6) \times 12$

よって　$x = 12$

また　$AB : BD = AC : CE$

$12 : 6 = 9 : y$

$12 \times y = 6 \times 9$

よって　$y = \dfrac{9}{2}$

(3) DE∥BC より

$AE : AC = DE : BC$

$8 : (x-8) = 16 : 20$

$16 \times (x-8) = 8 \times 20$

よって　$x = 18$

10

(1) $\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$3 : 9 = 4 : x$

$3 \times x = 9 \times 4$

よって　$x = 12$

(2) $\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$x : (24-x) = 6 : 9$

$x : (24-x) = 2 : 3$

$x \times 3 = (24-x) \times 2$

よって　$x = \dfrac{48}{5}$

(3) $\ell /\!/ m /\!/ n$ より

$4 : (x-4) = 3 : 5$

$(x-4) \times 3 = 4 \times 5$

よって　$x = \dfrac{32}{3}$

11

(1) AB∥CD より　$BE : EC = AB : CD$

よって　$BE : EC = 4 : 8 = 1 : 2$

さらに，EF∥CD より　$BF : FD = BE : EC$

$4 : x = 1 : 2$

$4 \times 2 = x \times 1$

したがって　$x = 8$

また，EF∥CD より　$EF : CD = BE : BC$

$y : 8 = 1 : (1+2)$

$y \times 3 = 8 \times 1$

したがって　$y = \dfrac{8}{3}$

(2) 直線 CE と線分 BF の交点を G とする。

EF∥CD より　$GF : GD = EF : CD$

$x : (x+12) = 4 : 16$

$x : (x+12) = 1 : 4$

$x \times 4 = (x+12) \times 1$

したがって　$x = 4$

また，EF∥AB より　$DF : DB = EF : AB$

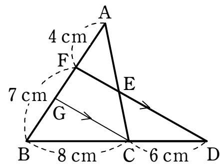
$12 : (12+4+y) = 4 : 7$

$12 \times 7 = (16+y) \times 4$

したがって　$y = 5$

12

(1) C を通り DF に平行に引いた直線と AB との交点を G とする。

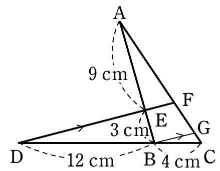


CG∥DF であるから　$BG : GF = BC : CD = 4 : 3$

よって　$GF = \dfrac{3}{7}BF = 3$ (cm)

FE∥GC であるから　$AE : EC = AF : FG = 4 : 3$

(2) B を通り DF に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。



BG∥DF であるから　$CG : GF = CB : BD = 1 : 3$

よって　$CG = \dfrac{1}{3}FG$

したがって　$FC = FG + \dfrac{1}{3}FG = \dfrac{4}{3}FG$

EF∥BG であるから　$AF : FG = AE : EB = 3 : 1$

よって　$AF = 3FG$

したがって　$AF : FC = 3FG : \dfrac{4}{3}FG = 9 : 4$

13

(1) EB∥DC であるから

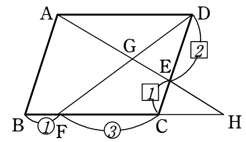
$BF : FD = EB : DC$　　よって　$BF : FD = 2 : (3+2) = 2 : 5$

(2) EB∥DC であるから

$EF : FC = EB : DC$　　よって　$EF : FC = 2 : 5$

したがって，$EF = \dfrac{2}{2+5}EC = \dfrac{2}{7}EC$ であるから　$EF = \dfrac{2}{7} \times 14 = 4$ (cm)

14



線分 AE，BC を延長して，その交点を H とする。

AD∥CH であるから

$AD : HC = DE : CE$

よって　$AD : HC = 2 : 1$

したがって　$HC = \dfrac{1}{2}AD$　……①

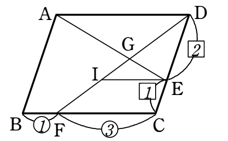
仮定から　$BF : FC = 1 : 3$

よって　$FC = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3}{4}AD$　……②

①，② から　$FH = FC + CH = \dfrac{3}{4}AD + \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{5}{4}AD$

AD∥FH であるから

$DG : GF = AD : FH = AD : \dfrac{5}{4}AD = 4 : 5$



別解　点 E を通り，AD，BC に平行な線分を引き，線分 DF との交点を I とする。

IE∥FC であるから

$DI : IF = DE : EC = 2 : 1$

すなわち　$DI = \dfrac{2}{3}DF$　……③

$IE : FC = DE : DC = 2 : (2+1) = 2 : 3$

すなわち　$IE = \dfrac{2}{3}FC$

$FC = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3}{4}AD$ であるから　$IE = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}AD = \dfrac{1}{2}AD$

AD∥IE であるから

$DG : GI = AD : IE = AD : \dfrac{1}{2}AD = 2 : 1$

すなわち　$DG = \dfrac{2}{3}DI$

これと ③ から　$DG = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}DF = \dfrac{4}{9}DF$

よって　$GF = DF - DG = DF - \dfrac{4}{9}DF = \dfrac{5}{9}DF$

したがって　$DG : GF = \dfrac{4}{9}DF : \dfrac{5}{9}DF = 4 : 5$

$\boxed{15}$

(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$
$$5:x=10:8$$
$$5\times 8=x\times 10$$

よって　$x=4$

(2)　△ABC において，AD は ∠A の外角の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$
$$(3+x):x=5:3$$
$$(3+x)\times 3=x\times 5$$

よって　$x=\dfrac{9}{2}$

(3)　AB∥ED より　CD：CB＝ED：AB

よって，CD：CB＝6：18＝1：3 であるから　BD：DC＝(3−1)：1＝2：1

△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$
$$2:1=18:x$$
$$2\times x=1\times 18$$

したがって　$x=9$

$\boxed{16}$

(1)　△ABE において，中点連結定理により

$$\mathrm{MD}/\!/\mathrm{AE}\quad \cdots\cdots①,\qquad \mathrm{MD}=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\quad \cdots\cdots②$$

② より　AE＝2MD＝8 (cm)

(2)　① より，MD∥FE であるから　FE：MD＝CE：CD

$$\mathrm{FE}:4=1:2$$

よって　FE＝2　　したがって　AF＝8−2＝6 (cm)

$\boxed{17}$

△ABC において，中点連結定理により　$\mathrm{MP}/\!/\mathrm{BC},\ \mathrm{MP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

△DBC において，中点連結定理により　$\mathrm{QN}/\!/\mathrm{BC},\ \mathrm{QN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

したがって　MP∥QN，MP＝QN

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 MPNQ は平行四辺形である。

$\boxed{18}$

四角形 ARPQ は平行四辺形であるから　AB∥QP，AC∥RP

よって　△ABC ∽ △RBP ∽ △QPC

また，BP：PC＝3：2 であるから，相似比は　BC：BP：PC＝(3＋2)：3：2＝5：3：2

したがって，面積比は　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{RBP}:\triangle\mathrm{QPC}=5^2:3^2:2^2=25:9:4$

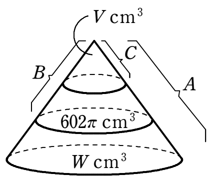
よって　$\triangle\mathrm{RBP}=\dfrac{9}{25}\triangle\mathrm{ABC},\quad \triangle\mathrm{QPC}=\dfrac{4}{25}\triangle\mathrm{ABC}$

したがって，▱ARPQ の面積を S とおくと

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-\frac{9}{25}\triangle\mathrm{ABC}-\frac{4}{25}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{12}{25}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，▱ARPQ の面積は，△ABC の面積の $\dfrac{12}{25}$ 倍である。

$\boxed{19}$



もとの円錐を A，A から一番下の立体を取り除いた円錐を B，一番上の円錐を C とする。

A と B と C は相似で，その相似比は　3：2：1

したがって，体積比は　$3^3:2^3:1^3=27:8:1$

(1)　一番上の円錐の体積を V cm^3 とすると

$$602\pi:V=(8-1):1=7:1$$

よって　$V=602\pi\times\dfrac{1}{7}=86\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

(2)　一番下の立体の体積を W cm^3 とする。

(1) の結果から　$W:86\pi=(27-8):1=19:1$

よって　$W=86\pi\times 19=1634\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

$\boxed{1}$

△ABC と △ADE において

△ABD∽△ACE から

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{AD}:\mathrm{AE}$$

よって　$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{AC}:\mathrm{AE}$　……①

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{DAC}$$
$$\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{CAE}$$

∠BAD＝∠CAE であるから

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DAE}$　……②

①，② より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△ADE

$\boxed{2}$

[1]　BD：DA＝6：(3＋9)＝1：2，BF：FC＝2：(1＋6)＝2：7

よって，DF と AC は平行でない。

[2]　BD：DA＝1：2，BG：GC＝(2＋1)：6＝1：2

よって，DG と AC は平行である。

[3]　BE：EA＝(6＋3)：9＝1：1，BF：FC＝2：7

よって，EF と AC は平行でない。

[4]　BE：EA＝1：1，BG：GC＝1：2

よって，EG と AC は平行でない。

以上から，辺 AC に平行な線分は　DG

$\boxed{3}$

EQ∥AD より　EQ：AD＝BE：BA

$$2:x=3:(3+4)$$

よって　$x=\dfrac{14}{3}$

ER∥BC より　ER：BC＝AE：AB

$$(2+y):14=4:(4+3)$$

よって　$y=6$

RF∥AD，AD∥EF∥BC より

$$\mathrm{RF}:\mathrm{AD}=\mathrm{CF}:\mathrm{CD}=\mathrm{BE}:\mathrm{BA}$$
$$z:\frac{14}{3}=3:(3+4)$$

よって　$z=2$

4

(1)　BE∥CF であるから　BE：CF＝AE：AF

よって　$x：2＝$AE：AF　……①

AD∥CF であるから　AE：EF＝AD：FC

よって　AE：EF＝4：2＝2：1　……②

①，② から　$x：2＝2：(2+1)$

これを解くと　$x=\dfrac{4}{3}$

(2)　DE∥BC であるから

EF：BF＝DE：BC

よって　$3：x＝$DE：BC　……①

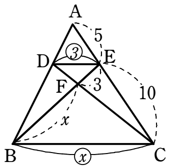
DE∥BC であるから

DE：BC＝AE：AC

$＝5：(5+10)＝1：3$　……②

①，② から　$3：x＝1：3$

これを解くと　$x=9$



(3)　AC∥ED であるから

BD：DC＝BE：EA

よって　$(9+6)：x＝$BE：EA　……①

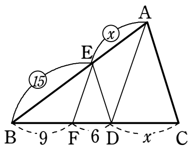
AD∥EF であるから

BE：EA＝BF：FD

よって　BE：EA＝9：6＝3：2　……②

①，② から　$15：x＝3：2$

これを解くと　$x=10$



5

歩き始めてから x 秒後に A 君の影の先端がちょうど C に到達するとする。

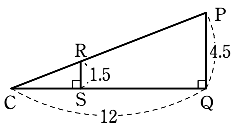
このとき，A 君を線分 RS とみると，

△CRS∽△CPQ であるから

CS：CQ＝RS：PQ

よって　$(12-x)：12＝1.5：4.5$

これを解いて　$x=8$　　したがって　8 秒後



6

DF∥AC より，BF：FC＝BD：DA＝3：2 であるから　BF$=\dfrac{3}{3+2}$BC$=\dfrac{3}{5}$BC

EG∥AB より，CG：GB＝CE：EA＝4：3 であるから　CG$=\dfrac{4}{4+3}$BC$=\dfrac{4}{7}$BC

よって　GF$=\dfrac{3}{5}$BC$+\dfrac{4}{7}$BC$-$BC$=\dfrac{6}{35}$BC

したがって　BC：GF＝BC：$\dfrac{6}{35}$BC＝35：6

7

(1)　AD∥BG であるから　AD：BG＝AE：BE＝2：1　　よって　AD＝2BG

BC＝AD であるから　CG＝2BG＋BG＝3BG

また，DF$=\dfrac{1}{2}$AD であるから　DF＝BG

したがって　DF：CG＝BG：3BG＝1：3

DF∥CG であるから　FH：HC＝DF：CG＝1：3

(2)　DH：GH＝DF：CG＝1：3 であるから　DH$=\dfrac{1}{1+3}$DG$=\dfrac{1}{4}$DG

また，DE：GE＝AE：BE＝2：1 であるから　DE$=\dfrac{2}{2+1}$DG$=\dfrac{2}{3}$DG

よって　HE$=\dfrac{2}{3}$DG$-\dfrac{1}{4}$DG$=\dfrac{5}{12}$DG

したがって　DH：HE$=\dfrac{1}{4}$DG：$\dfrac{5}{12}$DG＝3：5

8

(1)　AG：GD＝3：2 であるから

AG$=\dfrac{3}{3+2}$AD$=\dfrac{3}{5}$BC

よって　AG$=\dfrac{3}{5}\times 7=\dfrac{21}{5}$

EH∥AG であるから

EH：AG＝BE：BA

EH：$\dfrac{21}{5}=3：(3+4)$

EH$\times 7=\dfrac{21}{5}\times 3$

よって　EH$=\dfrac{9}{5}$

(2)　EF∥BC より

EF：BC＝AE：AB

EF：$7＝4：(4+3)$

EF$\times 7=7\times 4$

よって　EF＝4

したがって　HF＝EF－EH$=4-\dfrac{9}{5}=\dfrac{11}{5}$

9

(1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC

よって　BD：DC＝9：6＝3：2

したがって　BD$=\dfrac{3}{5}$BC$=\dfrac{3}{5}\times 8=\dfrac{24}{5}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

AI：ID＝BA：BD

よって　AI：ID$=9：\dfrac{24}{5}=15：8$

(2)　AD は ∠BAC の二等分線であるから

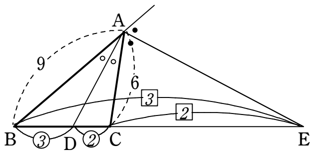
BD：DC＝AB：AC

よって

BD：DC＝9：6＝3：2

したがって

BD$=\dfrac{3}{5}$BC，DC$=\dfrac{2}{5}$BC　……①



AE は ∠BAC の外角の二等分線であるから

BE：EC＝AB：AC

よって　BE：EC＝3：2

すなわち　BC：CE＝$(3-2)：2＝1：2$

したがって　CE＝2BC　……②

①，② から　DE＝DC＋CE$=\dfrac{2}{5}$BC$+2$BC$=\dfrac{12}{5}$BC

よって　BD：DE$=\dfrac{3}{5}$BC：$\dfrac{12}{5}$BC＝1：4

10

△ABM において，MD は ∠AMB の二等分線であるから

AD：DB＝MA：MB

△ACM において，ME は ∠AMC の二等分線であるから

AE：EC＝MA：MC

MB＝MC であるから　AD：DB＝AE：EC

よって，DE∥BC である。

11

AE$=2a$ とすると，仮定から

EC$=2a$，AB$=5a$

△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

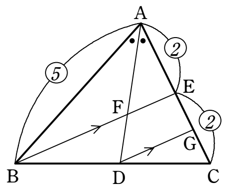
BD：DC＝AB：AC$=5a：(2a+2a)=5：4$

D を通り BE に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。

DG∥BE であるから　EG：GC＝BD：DC＝5：4

よって　EG$=\dfrac{5}{5+4}$EC$=\dfrac{5}{9}$EC$=\dfrac{10}{9}a$

FE∥DG であるから　AF：FD＝AE：EG$=2a：\dfrac{10}{9}a=9：5$



別解　上の解答と同様に AE$=2a$ とすると

EC$=2a$，AB$=5a$

BD：DC＝5：4

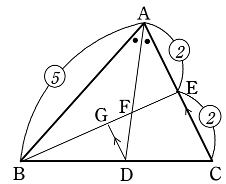
D を通り AC に平行に引いた直線と BE との交点を G とする。

EC∥GD であるから

EC：GD＝BC：BD＝$(5+4)：5=9：5$

AE∥GD，AE＝EC であるから

AF：FD＝AE：GD＝EC：GD＝9：5



12

△ABC において，中点連結定理により　ED∥AB

平行線の同位角は等しいから　∠CED＝∠CAB$=80^\circ$

△EDC において　∠EDC$=180^\circ-(26^\circ+80^\circ)=74^\circ$

よって，△FBD において，内角と外角の関係から　$\angle x=74^\circ-42^\circ=32^\circ$

13

△ABC，△BCD，△CDE，△DEA，△EABにおいて，中点連結定理により

$$PQ=\frac{1}{2}AC,\ QR=\frac{1}{2}BD,\ RS=\frac{1}{2}CE,\ ST=\frac{1}{2}DA,\ TP=\frac{1}{2}EB$$

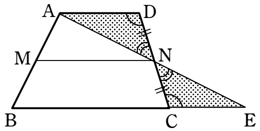
よって　$PQ+QR+RS+ST+TP=\frac{1}{2}(AC+BD+CE+DA+EB)$

$$=\frac{1}{2}\times30=15\,(\mathrm{cm})$$

したがって，五角形PQRSTの周の長さは15 cmである。

14

(1) 証明　直線ANとBCの交点をEとする。



△ADNと△ECNにおいて

DN＝CN　(仮定)

∠AND＝∠ENC　(対頂角)

AD∥BEから

∠ADN＝∠ECN　(錯角)

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから　△ADN≡△ECN

したがって　AN＝EN　……①，　AD＝EC　……②

△ABEにおいて，①から，M，Nはそれぞれ辺AB，AEの中点である。

よって，中点連結定理により　MN∥BE　……③，　$MN=\frac{1}{2}BE$　……④

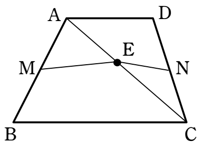
③から　MN∥BC

②，④から　$MN=\frac{1}{2}(BC+EC)=\frac{1}{2}(AD+BC)$　終

(2) (1)から　$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(4+8)=6\,(\mathrm{cm})$　答

(1)の別証

証明　対角線ACの中点をEとする。



△ABCにおいて，M，Eはそれぞれ辺AB，ACの中点であるから，中点連結定理により

ME∥BC　……①

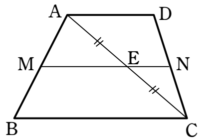
$ME=\frac{1}{2}BC$　……②

△CDAにおいて，N，Eはそれぞれ辺CD，CAの中点であるから，中点連結定理により

EN∥AD　……③，　$EN=\frac{1}{2}AD$　……④

BC∥ADであるから，①，③より　ME∥EN

すなわち，3点M，E，Nは一直線上にあり，点Eは線分MN上にある。



よって，①から　MN∥BC

また　MN＝ME＋EN

②，④から　$MN=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD$

$=\frac{1}{2}(AD+BC)$　終

15

MとNを結ぶ。

四角形ABNMにおいて，AM∥BN，AM＝BNであるから，四角形ABNMは平行四辺形である。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから　MP＝PB

同様に，四角形MNCDは平行四辺形であるから　MQ＝QC

よって，△MBCにおいて，中点連結定理により　PQ∥BC

16

△ABC，△ACDにおいて，中点連結定理により

EF∥AC，$EF=\frac{1}{2}AC$　　HG∥AC，$HG=\frac{1}{2}AC$

よって　EF∥HG，$EF=HG=\frac{1}{2}AC$　……①

また，△ABD，△BCDにおいて，中点連結定理により

EH∥BD，$EH=\frac{1}{2}BD$　　FG∥BD，$FG=\frac{1}{2}BD$

よって　EH∥FG，$EH=FG=\frac{1}{2}BD$　……②

(1) AC＝BDのとき，①，②より　EF＝HG＝EH＝FG

したがって，四角形EFGHの4辺はすべて等しいから，ひし形である。

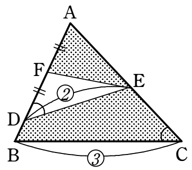
(2) 線分BDと線分ACの交点をI，線分BDと線分EFの交点をJ，線分ACと線分EHの交点をKとする。

四角形EJIKは平行四辺形であるから，∠AIB＝90°のとき∠HEF＝90°である。

同様に，∠EFG＝∠FGH＝∠GHE＝90°であるから，四角形EFGHは長方形である。

17

△ABCの面積をSとする。



△ABC∽△AEDであり，相似比は

BC：ED＝3：2

よって，面積比は

△ABC：△AED＝3^2：2^2＝9：4

したがって　$△AED=\frac{4}{9}S$

よって　(四角形DBCEの面積)＝△ABC－△AED

$$=S-\frac{4}{9}S=\frac{5}{9}S$$

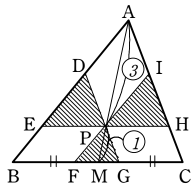
また　△AFE：△AED＝AF：AD＝1：(1＋1)＝1：2

ゆえに　$△AFE=\frac{1}{2}△AED=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}S=\frac{2}{9}S$

したがって　$\frac{2}{9}S\div\frac{5}{9}S=\frac{2}{9}\times\frac{9}{5}=\frac{2}{5}$　答　$\frac{2}{5}$倍

18

AB∥IF，BC∥EH，CA∥GDであるから，△DEP，△PFG，△IPHは，△ABCと相似である。



[1] △PFGと△ABCの相似比は

PF：AB＝PM：AM＝1：(3＋1)＝1：4

よって，面積比は

△PFG：△ABC＝1^2：4^2＝1：16

したがって　$△PFG=\frac{1}{16}△ABC=\frac{1}{16}\times320=20\,(\mathrm{cm}^2)$

[2] △DEPと△ABCの相似比は　EP：BC＝EP：2BM

ここで，EP：BM＝3：(3＋1)＝3：4であるから　EP：BC＝3：(2×4)＝3：8

よって，面積比は　△DEP：△ABC＝3^2：8^2＝9：64

したがって　$△DEP=\frac{9}{64}△ABC=\frac{9}{64}\times320=45\,(\mathrm{cm}^2)$

[3] [2]と同様にして，△IPHと△ABCの面積比が9：64と求められる。

したがって　$△IPH=\frac{9}{64}△ABC=\frac{9}{64}\times320=45\,(\mathrm{cm}^2)$

[1]～[3]から，求める面積の和は　$20+45+45=110\,(\mathrm{cm}^2)$

19 [常総学院]

(1) BG：GD＝CH：HDより　GH∥BC

よって　GH：BC＝DG：DB

GH：6＝2：3

したがって　GH＝4 cm

(2) △DGH∽△DBCであり，相似比は

DG：DB＝2：3

よって，面積の比は　2^2：3^2＝4：9

したがって，△DBCと四角形GHCBの面積の比は

9：(9－4)＝9：5

三角錐D－ABCの体積をV，立体ABCHGの体積をWとすると

V：W＝9：5

$$W=\frac{5}{9}V$$

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times5=30\ (\mathrm{cm}^3)$であるから，求める立体の体積は

$$\frac{5}{9}\times30=\frac{50}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

20 [福島県]

高さが8 cmの円錐をX，切ったときの上側の円錐をYとする。

円錐Xの体積は　$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

XとYは相似で，その相似比は

2：1

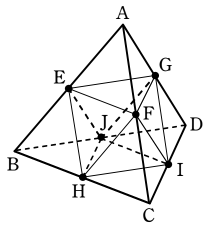
よって，体積の比は　2^3：1^3＝8：1

したがって，求める立体の体積は

$$96\pi\times\frac{8-1}{8}=84\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

21

点E，F，Gは，それぞれ辺AB，AC，ADの中点であるから，面EFGと面BCDは平行である。



よって，正四面体ABCDと立体AEFGは相似で，その相似比は　　2：1

したがって，体積比は　$2^3:1^3=8:1$

よって，立体AEFGの体積は　$\frac{1}{8}V$

同様にして，立体BHJE，CIHF，DJIGの体積もそれぞれ $\frac{1}{8}V$ であることがわかる。

したがって　$V:V'=V:\left(V-\frac{1}{8}V\times 4\right)=V:\frac{1}{2}V=2:1$

22

三角錐P－QDRと三角錐A－CDEは相似で，その相似比は　$2:(2+1)=2:3$

したがって，体積比は　$2^3:3^3=8:27$

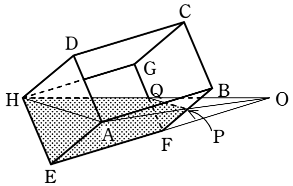
立体A－BCDEは正四角錐であるから，三角錐A－CDEとA－CBEは合同である。

よって，三角錐P－QDRと正四角錐A－BCDEの体積比は　$8:(2\times 27)=4:27$

したがって　$V:V'=4:(27-4)=4:23$

23

図のように，AP，EF，HQの交点をOとする。



PF∥AEであるから

$\mathrm{OF}:\mathrm{OE}=\mathrm{PF}:\mathrm{AE}=1:2$

$\mathrm{OF}:(\mathrm{OF}+12)=1:2$

よって　OF＝12

このとき，三角錐O－AEHの体積は

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 8\right)\times(12+12)=256\,(\mathrm{cm}^3)$

三角錐O－PFQの体積は

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\right)\times 12=32\,(\mathrm{cm}^3)$

したがって，求める体積は　$256-32=224\,(\mathrm{cm}^3)$

1

△AFEと△GHEにおいて

∠AEF＝∠GEH（共通）　……①

△ABC≡△ADEであるから

∠FBG＝∠FDA

△FDAと△FBGにおいて，内角と外角の関係から

∠FDA＋∠FAD＝∠FBG＋∠FGB

よって　∠FAD＝∠FGB

また，ABは∠DAEを2等分しているから

∠FAD＝∠EAF

対頂角は等しいから　∠FGB＝∠EGH

よって　∠EAF＝∠EGH　……②

①，②より，2組の角がそれぞれ等しいから

△AFE∽△GHE

2

点Aから辺BCに引いた垂線の足をF，辺ACと線分BEの交点をGとする。

△BCGと△ACFにおいて

∠BCG＝∠ACF（共通），　∠BGC＝∠AFC＝90°

よって，2組の角がそれぞれ等しいから，残りの角も等しくなり

∠CBG＝∠CAF　……①

△BCEと△ADCにおいて

$\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$ から　BC：AD＝2：1

BE＝2CAから　BE：AC＝2：1

よって　BC：AD＝BE：AC　……②

①，②より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△BCE∽△ADC

相似比は2：1であるから　CE：CD＝2：1

3

まず，△ACE≡△DCBを証明する。

△ACEと△DCBにおいて

△ACDは正三角形であるから　AC＝DC　……①

△CBEは正三角形であるから　CE＝CB　……②

また　∠ACE＝180°－∠BCE＝180°－60°＝120°

∠DCB＝180°－∠ACD＝180°－60°＝120°

よって　∠ACE＝∠DCB　……③

①，②，③より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△ACE≡△DCB

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠AEC＝∠DBC　……④

次に，△ADFと△BCHにおいて　∠ADF＝∠BCH＝60°　……⑤

∠DAC＝∠ECB＝60°より，同位角が等しいから　AD∥CE

よって，錯角が等しいから　∠DAF＝∠AEC　……⑥

④，⑥より　∠DAF＝∠CBH　……⑦

⑤，⑦より，2組の角がそれぞれ等しいから　△ADF∽△BCH

4

まず，△CBE≡△CDEと△BCM≡△ADMを証明する。

△CBEと△CDEにおいて　CE＝CE（共通）

四角形ABCDは正方形であるから

CB＝CD，　∠BCE＝∠DCE＝45°

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△CBE≡△CDE

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠CBE＝∠CDE　……①

また，△BCMと△ADMにおいて

仮定から　CM＝DM

四角形ABCDは正方形であるから　BC＝AD，∠BCM＝∠ADM＝90°

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△BCM≡△ADM

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠CBM＝∠DAM　……②

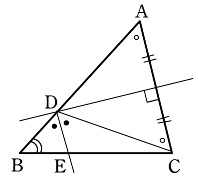
①，②より　∠FDM＝∠DAM　……③

次に，△DFMと△ADMにおいて　∠DMF＝∠AMD（共通）……④

③，④より，2組の角がそれぞれ等しいから　△DFM∽△ADM

5

証明　垂直二等分線上の点から線分の2つの端点までの距離は等しいから，△DACはDA＝DCの二等辺三角形である。



よって　∠DAC＝∠DCA

したがって，△DACにおいて，内角と外角の性質から

∠BDC＝2∠DAC

また，仮定より　∠BDC＝2∠BDE

よって　∠DAC＝∠BDE

すなわち　∠BAC＝∠BDE

また　∠ABC＝∠DBE（共通）

したがって，△ABCと△DBEにおいて，2組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△DBE　**終**

6

△ABFと△FCEにおいて

∠ABF＝∠FCE＝90°　……①

△ABFにおいて　∠BAF＋∠AFB＝90°　……②

∠AFE＝90°であるから

∠CFE＋∠AFB＝90°　……③

②，③から　∠BAF＝∠CFE　……④

①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから

△ABF∽△FCE

AF＝AD＝10 cm，FE＝DE＝5 cmであるから，△ABFと△FCEの相似比は

AF：FE＝10：5＝2：1　　よって　AB：FC＝2：1

AB＝x cmとすると　$x:\mathrm{FC}=2:1$　　したがって　$\mathrm{FC}=\frac{1}{2}x$ cm

また，BF：CE＝2：1で，CE＝$(x-5)$ cmであるから　BF＝$2(x-5)$ cm

BC＝10 cmであるから　$2(x-5)+\frac{1}{2}x=10$　　これを解いて　$x=8$

よって　AB＝8 cm

$\boxed{7}$

△FGI と △DBC において

$\angle FIG=\angle DCB=90^\circ$ ……①

線分 BD と FG の交点を P とする。

$\angle IGB=90^\circ$ であるから　$\angle FGI+\angle BGP=90^\circ$ ……②

線分 FG を折り目として，点 B が移る点が E であるから　$BE\perp FG$

よって，$\angle BPG=90^\circ$ であるから　$\angle DBC+\angle BGP=90^\circ$ ……③

②，③ から　$\angle FGI=\angle DBC$ ……④

①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle FGI\backsim\triangle DBC$

よって　$IF:CD=GI:BC$

$IF:3=3:6$

したがって　$IF=\dfrac{3}{2}$ cm

$\boxed{8}$

$DR=x$ cm とおく。

QR∥BC より　$QR:BC=DR:DC$

$QR:10=x:8$

よって　$QR=\dfrac{5}{4}x$ cm

また，AD∥PR∥BC より

$BP:BA=CR:CD=(8-x):8$

PQ∥AD より

$PQ:AD=BP:BA$

$PQ:5=(8-x):8$

よって　$PQ=\dfrac{5}{8}(8-x)$ cm

$PQ:QR=1:3$ より，$3PQ=QR$ であるから

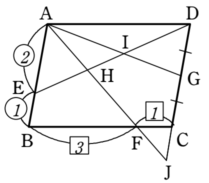
$3\times\dfrac{5}{8}(8-x)=\dfrac{5}{4}x$

これを解いて　$x=\dfrac{24}{5}$

したがって　$DR=\dfrac{24}{5}$ cm

$\boxed{9}$

直線 AF と直線 DC の交点を J とする。



AB∥CJ であるから　$AB:JC=BF:CF=3:1$

よって　$JC=\dfrac{1}{3}AB$

したがって　$JD=JC+CD=\dfrac{1}{3}AB+AB=\dfrac{4}{3}AB$

また　$AE=\dfrac{2}{2+1}AB=\dfrac{2}{3}AB$

AE∥DJ であるから　$EH:DH=AE:JD=\dfrac{2}{3}AB:\dfrac{4}{3}AB=1:2$

よって　$EH=\dfrac{1}{1+2}ED=\dfrac{1}{3}ED$ ……①

また，AE∥DG であるから

$EI:DI=AE:GD=\dfrac{2}{3}AB:\dfrac{1}{2}AB=4:3$

よって　$DI=\dfrac{3}{4+3}ED=\dfrac{3}{7}ED$ ……②

①，② より　$EH:ID=\dfrac{1}{3}ED:\dfrac{3}{7}ED=7:9$

$\boxed{10}$

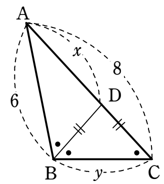
△ABC と △ADB において

仮定から　$\angle DBC=\angle ACB$,　$\angle DBC=\angle ABD$

よって　$\angle ACB=\angle ABD$

また　$\angle BAC=\angle DAB$ （共通）

2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ABC\backsim\triangle ADB$



したがって　$AB:AD=AC:AB$

$AD=x$ cm とすると　$6:x=8:6$

よって　$6\times 6=x\times 8$

これを解くと　$x=\dfrac{9}{2}$

したがって　$CD=8-\dfrac{9}{2}=\dfrac{7}{2}$ (cm)

$\angle DBC=\angle DCB$ であるから　$BD=CD$

よって　$BD=\dfrac{7}{2}$ cm

$\triangle ABC\backsim\triangle ADB$ であるから　$BC:DB=AC:AB$

$BC=y$ cm とすると　$y:\dfrac{7}{2}=8:6$

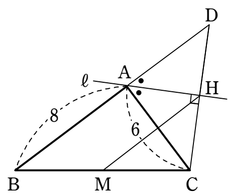
したがって　$y\times 6=\dfrac{7}{2}\times 8$

これを解くと　$y=\dfrac{14}{3}$

よって　$BC=\dfrac{14}{3}$ cm

$\boxed{11}$

BA と CH の交点を D とする。



△ACH と △ADH において

$AH=AH$

$\angle CAH=\angle DAH$

$\angle CHA=\angle DHA$

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

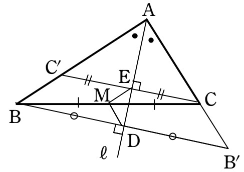
$\triangle ACH\equiv\triangle ADH$

よって　$AD=AC=6$ cm

$CH=DH$

△BCD において，中点連結定理により　$MH=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}\times(8+6)=7$ (cm)

$\boxed{12}$



証明　線分 BD の延長と線分 AC の延長の交点を B′，線分 CE の延長と辺 AB の交点を C′ とする。

$\angle C'AC$ の二等分線が底辺 C′C に垂直であるから，

$\triangle AC'C$ は $AC'=AC$ の二等辺三角形である。

同様に，$\triangle ABB'$ は $AB=AB'$ の二等辺三角形である。

したがって　$BC'=B'C$ ……①

$\triangle CC'B$ において，点 E，M はそれぞれ辺 CC′，CB の中点であるから，中点連結定理により

$ME=\dfrac{1}{2}BC'$ ……②

同様にして　$MD=\dfrac{1}{2}B'C$ ……③

①，②，③ から　$MD=ME$

また　$MD=\dfrac{1}{2}B'C=\dfrac{1}{2}(AB'-AC)=\dfrac{1}{2}(AB-AC)$　終

$\boxed{13}$

△ABD において，点 N，G は，それぞれ辺 AB，AD の中点であるから，中点連結定理により　NG∥BD

すなわち　GC∥BD ……①

また，△ADC において，点 G，M は，それぞれ辺 AD，AC の中点であるから，中点連結定理により　GM∥DC

すなわち　BG∥DC ……②

①，② より，四角形 BDCG は，2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，平行四辺形である。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから，E は辺 BC の中点である。

よって，AE は △ABC の中線であるから，三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる。

14 [開明]

(1)　AD∥BE より　BP：PD＝BE：AD

　　＝3：5　　……①

(2)　AB∥DF より　BQ：QD＝AB：DF

　　＝3：2　　……②

①より　$BP=\frac{3}{8}BD$，$PD=\frac{5}{8}BD$

②より　$BQ=\frac{3}{5}BD$，$QD=\frac{2}{5}BD$

よって　$PQ=\frac{3}{5}BD-\frac{3}{8}BD=\frac{9}{40}BD$　……③

したがって　$BP:PQ:QD=\frac{3}{8}:\frac{9}{40}:\frac{2}{5}$

　　$=15:9:16$

(3)　AB∥DF より　AQ：QF＝3：2

よって，AQ：QF＝BE：EC であるから

AB∥QE

したがって　△ABQ＝△ABE

よって　△APQ＝△PBE

したがって　△APQ：△PBE＝1：1

(4)　③より　$\triangle APQ=\frac{9}{40}\triangle ABD=\frac{9}{40}\times\frac{1}{2}S_1$

　　$=\frac{9}{80}S_1$

(3)より　$\triangle PBE=\triangle APQ=\frac{9}{80}S_1$　……④

QE∥DF より　△FQD＝△EFD

$\triangle EFD=\frac{2}{3}\triangle DEC$ で，$\triangle DEC=\frac{2}{5}\triangle BCD$ であるから

$\triangle EFD=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}S_1=\frac{2}{15}S_1$

よって　$\triangle FQD=\frac{2}{15}S_1$　……⑤

④，⑤より　$S_2=\frac{1}{2}S_1-\left(\frac{9}{80}S_1+\frac{2}{15}S_1\right)$

　　$=\frac{61}{240}S_1$

したがって　$S_1:S_2=240:61$

15 [三重県]

(1)　△BDE と △CFD において

正三角形 ABC の3つの角はすべて等しいので

∠EBD＝∠DCF＝60°　……①

∠BED＝180°－∠EBD－∠BDE

　＝180°－60°－∠BDE

　＝120°－∠BDE　……②

∠CDF＝180°－∠EDF－∠BDE

　＝180°－60°－∠BDE

　＝120°－∠BDE　……③

②，③より　∠BED＝∠CDF　……④

①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから

△BDE∽△CFD

(2)　(ア)　(1)で △BDE∽△CFD が証明されて折り返しているので

ED：DF＝AE：AF＝2：3

相似な図形の面積比は，相似比の2乗と等しいので

$\triangle BDE:\triangle CFD=2^2:3^2$

$=4:9$

(イ)　AE：AF＝2：3 で AE＝$2a$ より

AF＝$3a$

BE＝$12-2a$，CF＝$12-3a$ となる。

△BDE∽△CFD で

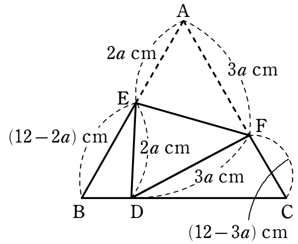
AE：AF＝ED：DF＝2：3 より

BD：CF＝2：3

BD：$(12-3a)$＝2：3

$BD=\frac{2}{3}(12-3a)$

$BD=8-2a$



同様にして

BE：CD＝2：3

$(12-2a)$：CD＝2：3

$CD=\frac{3}{2}(12-2a)$

$CD=18-3a$

BC＝BD＋CD＝12 より

$(8-2a)+(18-3a)=12$

$26-5a=12$

$-5a=-14$

$a=\frac{14}{5}$

よって　$a=\frac{14}{5}$

(ウ)　右の図の B と F を結ぶ。

△ABF の辺 AB 上に点 E がある。

$AE:EB=\frac{28}{5}:\frac{32}{5}=7:8$ であり，

高さが共通しているから

△AEF：△BEF＝7：8　……①

また，△ABC の辺 AC 上に点 F がある。

$AF:FC=\frac{42}{5}:\frac{18}{5}=7:3$ であり，

高さが共通しているので

△ABF：△BCF＝7：3　……②

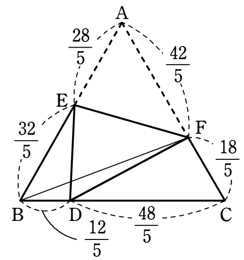
①より　△ABF：△AEF＝15：7　……③

②より　△ABC：△ABF＝10：7　……④

③，④より　△ABC：△ABF：△AEF＝150：105：49

△DEF＝△AEF であるので

△ABC：△DEF＝150：49



$\triangle DEF=\frac{49}{150}\times\triangle ABC$

よって，△ABC の面積の $\frac{49}{150}$ 倍になる。

16 [愛知県]

(1)　容器 A の体積は　$\pi\times9^2\times10=810\pi$ (cm^3)

鉄のおもり B の高さを h cm とすると

$\frac{1}{3}\times\pi\times9^2\times h=810\pi$

よって　$h=30$ (cm)

(2)　鉄のおもり B の容器 A に入っていない部分を P，それ以外を Q とする。

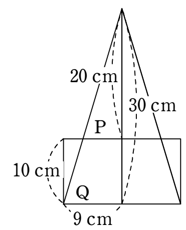
P と鉄のおもり B は相似で

相似比は　$(30-10):30=2:3$

よって，体積比は　$2^3:3^3=8:27$

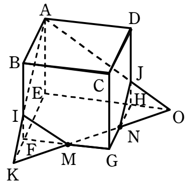
あふれ出た水の体積は Q の体積と等しいから

$810\pi\times\frac{27-8}{27}=570\pi$ (cm^3)



17

(1)　3点A，M，Nを通る平面と辺BF，DHとの交点をそれぞれI，Jとする。



また，AI，EF，NMの交点をKとし，AJ，EH，MNの交点をOとする。

△KMFと△NMGにおいて

FM＝GM

∠MFK＝∠MGN

∠KMF＝∠NMG

より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから　△KMF≡△NMG

よって　KF＝NG＝3 cm

IF∥AEであるから　IF：AE＝KF：KE＝3：(3＋6)＝1：3

したがって　IF＝2 cm

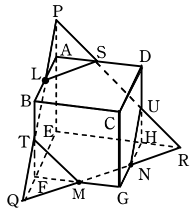
このとき，三角錐K－IFMの体積は　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)\times3=3\,(\mathrm{cm}^3)$

同様にして三角錐O－JHNの体積を求めると，3 cm^3 である。

また，三角錐A－EKOの体積は　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times9\times9\right)\times6=81\,(\mathrm{cm}^3)$

よって，求める体積は　$81-(3+3)=75\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　3点L，M，Nを通る平面と直線AE，EF，EH，AD，BF，DHとの交点をそれぞれP，Q，R，S，T，Uとする。



(1)と同様に考えると，三角錐Q－TFMの体積は

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times3=\frac{9}{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

同様にして，三角錐P－LASの体積，三角錐R－UHNの体積を求めると，ともに $\frac{9}{2}$ cm^3 である。

また，三角錐P－EQRの体積は　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times9\times9\right)\times9=\frac{243}{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

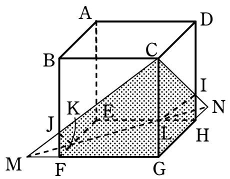
よって，求める体積は　$\frac{243}{2}-\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=108\ (\mathrm{cm}^3)$

別解　3点L，M，Nを通る平面で立方体を切断し，2つの立体に分けると，2つの立体は合同になる。

よって，求める体積は立方体の体積の半分であり　$\frac{1}{2}\times(6\times6\times6)=108\ (\mathrm{cm}^3)$

18

CJ，GF，KLを延長し，その交点をMとする。



また，CI，GH，KLを延長し，その交点をNとする。

さらに，三角錐MGNC，MFKJ，NHLIの体積をそれぞれV，V'，V''とする。

三角錐MGNCと三角錐MFKJは相似で，相似比は

GC：FJ＝12：3＝4：1

よって，体積比は　$V:V'=4^3:1^3=64:1$

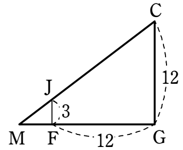
また，三角錐NGMCと三角錐NHLIは相似で，相似比は　GC：HI＝12：3＝4：1

よって，体積比は　$V:V''=4^3:1^3=64:1$

したがって，求める体積は

$V-V'-V''=V-\frac{1}{64}V-\frac{1}{64}V=\frac{31}{32}V$　……①

ここで，JF∥CGであるから



MF：MG＝JF：CG

よって　MF：(MF＋12)＝3：12

したがって　MF＝4

同じように考えて　NH＝4

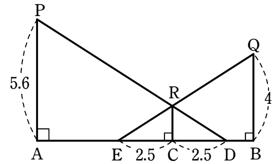
よって，三角錐MGNCの体積Vは

$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{MGN}\times\mathrm{CG}=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(12+4)\times(12+4)\right\}\times12=512$

①から，求める体積は　$\frac{31}{32}V=\frac{31}{32}\times512=496\,(\mathrm{cm}^3)$

1

下の図のように，5秒後に花子さんが到着した地点をCとし，このときにできる影の先端をそれぞれD，Eとする。また，街灯をそれぞれ線分PA，QBとし，花子さんを線分RCとする。



(1)　花子さんは毎秒x mの速さで歩くとすると　AC＝$5x$ m，　BC＝$3x$ m

△DREはRD＝REの二等辺三角形であるから　∠ADP＝∠BEQ

よって，△ADP∽△BEQであるから　AD：BE＝AP：BQ

$(5x+2.5):(3x+2.5)=5.6:4$

これを解いて　$x=\frac{5}{4}$

求める距離は $5x+3x=8x$ (m) であるから　$8\times\frac{5}{4}=10\,(\mathrm{m})$

(2)　$\mathrm{BC}=3\times\frac{5}{4}=\frac{15}{4}\,(\mathrm{m})$

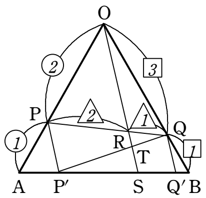
RC∥QBであるから　RC：QB＝CE：BE

$\mathrm{RC}:4=2.5:\left(\frac{15}{4}+2.5\right)$

これを解いて　RC＝1.6

よって，花子さんの身長は　1.6 m

2



(1) $PP' /\!/ RS /\!/ QQ'$ であるから

$P'S : SQ' = PR : RQ = 2 : 1$

(2) $PP' /\!/ OS$ であるから

$AP' : P'S = AP : PO = 1 : 2$ ……①

また，$QQ' /\!/ OS$ であるから

$BQ' : Q'S = BQ : QO = 1 : 3$ ……②

ここで，$SQ' = x$ とおく。

(1) より　$P'S = 2x$　……③

①，③ より　$AP' = x$　……④

② より　$BQ' = \frac{1}{3}x$　……⑤

③，④，⑤ より　$AS = AP' + P'S = x + 2x = 3x$

$SB = SQ' + Q'B = x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$

したがって　$AS : SB = 3x : \frac{4}{3}x = 9 : 4$

(3) $P'Q$ と RS の交点を T とする。

$PP' /\!/ OS /\!/ QQ'$ であるから，次の関係が，それぞれ成り立つ。

$PP' : OS = AP : AO = 1 : 3$　より　$PP' = \frac{1}{3}OS$

$RT : PP' = QR : QP = 1 : 3$　より　$RT = \frac{1}{3}PP' = \frac{1}{9}OS$　……⑥

$QQ' : OS = BQ : BO = 1 : 4$　より　$QQ' = \frac{1}{4}OS$

$TS : QQ' = P'S : P'Q' = 2 : 3$　より　$TS = \frac{2}{3}QQ' = \frac{1}{6}OS$　……⑦

⑥，⑦ より　$RS = RT + TS = \frac{1}{9}OS + \frac{1}{6}OS = \frac{5}{18}OS$

$OR = OS - RS = \frac{13}{18}OS$

したがって　$OR : RS = \frac{13}{18}OS : \frac{5}{18}OS = 13 : 5$

3

(1) 五角形の内角の和は　$180° \times (5-2) = 540°$

正五角形の内角は等しいから　$\angle ABC = \frac{540°}{5} = 108°$

また，$\triangle BAC$ は $BA = BC$ の二等辺三角形であるから

$\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$

(2) 証明　$\triangle BAC$ と $\triangle MAB$ において

$\angle BCA = \angle BAC = 36°$

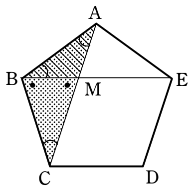
同様にして　$\angle ABE = 36°$

よって　$\angle BCA = \angle MBA$

また　$\angle BAC = \angle MAB$　(共通)

したがって，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BAC \backsim \triangle MAB$　終



(3) 証明　$\angle CBM = \angle CBA - \angle ABM = 108° - 36° = 72°$

$\triangle MAB$ において，内角と外角の性質から

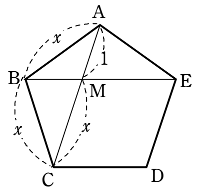
$\angle CMB = \angle ABM + \angle MAB = 36° + 36° = 72°$

よって，$\angle CBM = \angle CMB$ であるから，$\triangle CBM$ は $CB = CM$ の二等辺三角形である。

終

(4) $\triangle BAC \backsim \triangle MAB$ であるから

$AB : AM = AC : AB$



正五角形 ABCDE の1辺を x cm とすると，

$CM = CB = x$ であるから

$x : 1 = (1 + x) : x$

よって　$x \times x = 1 \times (1 + x)$

すなわち　$x^2 - x - 1 = 0$

これを解くと　$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

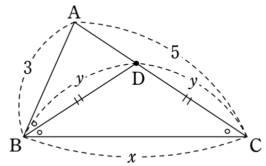
$x > 0$ であるから，正五角形の1辺の長さは　$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ cm

参考　$AM : MC = AM : AB = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は黄金比である。

4 [2016 巣鴨]

∠B の二等分線と AC との交点を D とする。

$\angle B = 2\angle C$ より，$\triangle DBC$ は $DB = DC$ の二等辺三角形である。



2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \backsim \triangle ADB$　…… ①

ここで，$BC = x$，$DB = DC = y$ とおくと

① より　$AC : AB = BC : DB$

$5 : 3 = x : y$

$x = \frac{5}{3}y$　…… ②

同じく ① より　$AB : AD = AC : AB$

$3 : (5 - y) = 5 : 3$

$5(5 - y) = 3 \times 3$

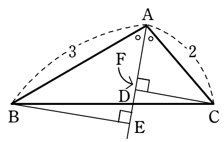
$y = \frac{16}{5}$

これを ② に代入して　$x = \frac{5}{3} \times \frac{16}{5} = \frac{16}{3}$

したがって，辺 BC の長さは　$\frac{16}{3}$

5

点 C から直線 AE に引いた垂線の足を F とする。



$\triangle ABE$ と $\triangle ACF$ において

$\angle BAE = \angle CAF$

$\angle AEB = \angle AFC = 90°$

よって，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$

したがって　$AE : AF = AB : AC = 3 : 2$

よって　$AF = \frac{2}{3}AE$，$EF = \frac{1}{3}AE$

$\triangle BDE$ と $\triangle CDF$ において

$\angle BDE = \angle CDF$　(対頂角)

$\angle BED = \angle CFD = 90°$

よって，2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle BDE \backsim \triangle CDF$

したがって　$DE : DF = BD : CD$

ここで，直線 AE は ∠BAC の二等分線であるから，$BD : CD = AB : AC = 3 : 2$ であり

$DE : DF = 3 : 2$

よって　$DE = \frac{3}{5}EF = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{1}{5}AE$

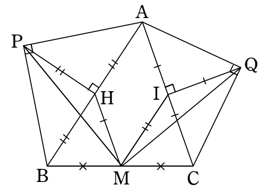
$DF = \frac{2}{5}EF = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{2}{15}AE$

$AD = AF + DF = \frac{2}{3}AE + \frac{2}{15}AE = \frac{4}{5}AE$ であるから

$AD : DE = \frac{4}{5}AE : \frac{1}{5}AE = 4 : 1$

6 [岡山白陵]

P から AB にひいた垂線を PH，Q から AC にひいた垂線を QI とする。



$\triangle HMP$ と $\triangle IQM$ において

$\triangle ABP$，$\triangle ACQ$ は直角二等辺三角形であるから

$AH = BH = PH$　……①

$AI = IC = QI$　……②

仮定から　$BM = CM$　……③

中点連結定理により

①，②，③ から　$HM = \frac{1}{2}AC = AI$

$= IQ$　……④

同様に　$IM = HP$　……⑤

また，中点連結定理により

$HM /\!/ AC$

$IM /\!/ AB$

平行線の同位角は等しいから

$\angle BHM = \angle BAC = \angle MIC$

$\angle PHM = 90° + \angle BHM$

$\angle MIQ = 90° + \angle MIC$

よって　$\angle PHM = \angle MIQ$　……⑥

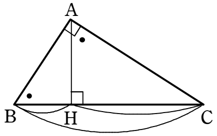
④，⑤，⑥ より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle HMP \equiv \triangle IQM$

よって　$PM = QM$

$\boxed{7}$

証明　△ABH∽△CAH で，相似比は AB : AC に等しいから



△ABH : △CAH

$=AB^2 : AC^2$　……①

△ABH と △CAH は高さが等しいから

△ABH : △CAH = BH : CH　……②

①，② から　$AB^2 : AC^2 = BH : CH$　……③

また，△CAH∽△CBA で，相似比は AC : BC に等しいから

△CAH : △CBA $= AC^2 : BC^2$　……④

△CAH と △CBA は高さが等しいから

△CAH : △CBA = CH : BC　……⑤

④，⑤ から　$AC^2 : BC^2 = CH : BC$　……⑥

③，⑥ から　$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BH : CH : BC$　終

$\boxed{8}$ [花園]

正六角形の 1 つの内角の大きさは

$$\frac{180^\circ\times4}{6}=120^\circ$$

よって，△OAB，△OBC，△OCD，△ODE，△OEF，△OFA は合同な正三角形である。

(1)　CI∥BO より　CQ : QO = CI : BO

= 1 : 2

(2)　直線 AH と OC の交点を R とする。

CH∥OA より

RC : RO = CH : OA = 1 : 2

よって　CR = OC

OC $= a$ とおくと，CQ $=\frac{1}{3}a$ であるから

$$RQ=a+\frac{1}{3}a=\frac{4}{3}a$$

BA∥RQ より

$$BP : PQ = AB : RQ = a : \frac{4}{3}a$$

= 3 : 4

(3)　△OAB $=S$ とおく。

BP : PQ = 3 : 4 より　BP : BQ = 3 : 7

よって　$△ABP=\frac{3}{7}△ABQ$

AB∥OC より，△ABQ = △OAB であるから

$$△ABP=\frac{3}{7}S$$

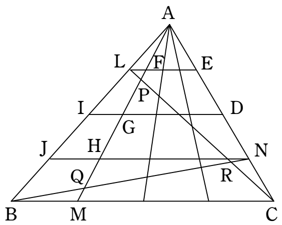
線分 AH，BI，CJ，DK，EL，FG によって囲まれてできる正六角形の面積は，正六角形 ABCDEF の面積から，△ABP の面積の 6 倍をひけばよいから

$$6S-\frac{3}{7}S\times6=\frac{24}{7}S$$

$\frac{24}{7}S\div6S=\frac{4}{7}$ より，$\frac{4}{7}$ 倍である。

$\boxed{9}$ [鎌倉学園]

(1)　右の図のように点 D，E，F，G，H，I，J を定める。



LF $= x$ とすると

BM $=4x$，MC $=12x$

$$HN=12x\times\frac{3}{4}=9x$$

LE∥ID∥JN∥BC であるから

HQ : QM = HN : BM = 9 : 4

FP : PM = LF : MC = 1 : 12

FG = GH = HM より，QM $=4a$ とおくと

HQ $=9a$，AF = FG = GH = HM $=13a$

$$FP=13a\times3\times\frac{1}{1+12}=3a$$

$$PM=13a\times3-3a=36a$$

よって　$AP : PQ : QM=(13a+3a) : (36a-4a) : 4a$

$=16a : 32a : 4a$

$=4 : 8 : 1$

(2)　(1) と同様にして　CR : RP : PL = BQ : QR : RN = 4 : 8 : 1

よって　$△PQR=\frac{8}{8+1}△LQR$

$$=\frac{8}{9}\times\frac{8}{8+4}△LBR$$

$$=\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{1+8}{1+8+4}△LBC$$

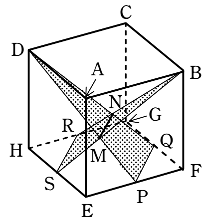
$$=\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{13}\times\frac{3}{4}△ABC$$

$$=\frac{4}{13}△ABC$$

したがって，△PQR の面積は △ABC の面積の $\frac{4}{13}$ 倍

$\boxed{10}$

線分 BS と線分 DP の交点を M，線分 BR と線分 DQ の交点を N とする。



△EFH において，中点連結定理により

$$PS∥FH，PS=\frac{1}{2}FH$$

BD∥FH，BD = FH であるから

$$PS∥BD，PS=\frac{1}{2}BD$$

PS∥BD より　DM : MP = BD : PS = 2 : 1

同様に，QR∥FH，QR $=\frac{1}{2}$FH であるから　QR∥BD，QR $=\frac{1}{2}$BD

QR∥BD より　DN : NQ = BD : QR = 2 : 1

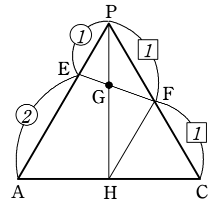
よって，DM : MP = DN : NQ であるから　MN∥PQ

したがって　MN : PQ = DM : DP = 2 : 3

よって，線分 MN の長さは，線分 PQ の長さの $\frac{2}{3}$ 倍である。

$\boxed{11}$

(1)　H は正方形 ABCD の対角線の交点である。



△PAC において，2 点 F，H は，それぞれ辺 CP，CA の中点であるから，中点連結定理により

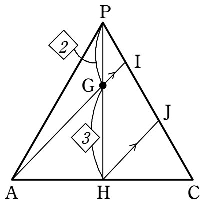
FH∥PA ……①，　FH $=\frac{1}{2}$PA ……②

PA = 3PE であるから，② により　FH $=\frac{3}{2}$PE

① により，PE∥FH であるから

$$PG : GH = PE : FH = PE : \frac{3}{2}PE = 2 : 3$$

(2)　H を通り AI に平行に引いた直線と PC との交点を J とする。



GI∥HJ であるから　PI : IJ = PG : GH

(1) により　PI : IJ = 2 : 3

よって　$PI=\frac{2}{3}IJ$

また，AI∥HJ であるから

IJ : JC = AH : HC = 1 : 1

よって　IC = 2IJ

したがって　$PI : IC=\frac{2}{3}IJ : 2IJ=1 : 3$

$\boxed{12}$

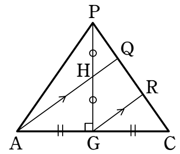
頂点 P から底面 ABCD に引いた垂線を PG とし，PG と MN の交点を H とする。

このとき，G は正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点で，H は AQ 上の点である。

△PBD において，中点連結定理により　MN∥BD

よって　PH : HG = PM : MB = 1 : 1

G を通り AQ に平行に引いた直線と PC との交点を R とする。



GR∥AQ であるから　CR : RQ = CG : GA = 1 : 1

したがって　CR = RQ　……①

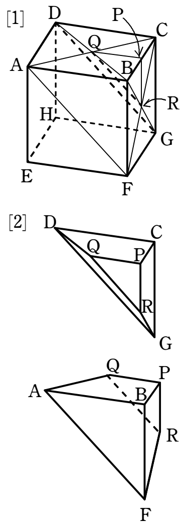
HQ∥GR であるから　PQ : QR = PH : HG = 1 : 1

よって　PQ = QR　……②

①，② より，PQ = QR = RC であるから　PQ : QC = 1 : 2

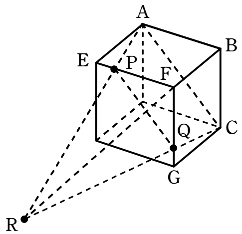
13

図[1]のように，辺 BC の中点を P，AC と BD の交点を Q，FC と BG の交点を R とする。
このとき，図[2]のように，合同な立体 ABF−QPR と DCG−QPR を考えると，頂点 E を含まない方の立体は，この２つの立体を合わせたものになる。
立体 ABF−QPR について，この立体は，三角錐 C−ABF から相似な三角錐 C−QPR を取り除いたものである。
三角錐 C−ABF と三角錐 C−QPR の相似比は　2：1
したがって
（立体 ABF−QPR の体積）：（三角錐 C−ABF の体積）
$=(2^3-1^3):2^3=7:8$
三角錐 C−ABF の体積は　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times6=36\,(\mathrm{cm}^3)$
よって，立体 ABF−QPR の体積は　$36\times\frac{7}{8}=\frac{63}{2}\,(\mathrm{cm}^3)$
したがって，求める立体の体積は　$6^3-\frac{63}{2}\times2=153\,(\mathrm{cm}^3)$



14

展開図を組み立てて，右の図のように点 B，C を定めると，小さい方の立体は，立体 PFQ−ABC である。
AP，BF の延長の交点を R とし，立方体の１辺の長さを a とする。



仮定より，$PF=FQ=\frac{3}{4}a$ であるから
$PF:AB=\frac{3}{4}a:a=3:4$
よって　$FR:BR=3:4$
$FR:BF=3:1$
したがって　$FR=3a$
三角錐 R−PFQ と三角錐 R−ABC は相似で，その相似比は　3：4
よって，体積比は　$3^3:4^3=27:64$
したがって，立体 PFQ−ABC と三角錐 R−ABC の体積比は　$(64-27):64=37:64$
よって　$V_1=\frac{37}{64}\times\left\{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times(a+3a)\right\}=\frac{37}{96}a^3$
したがって　$V_2=a^3-\frac{37}{96}a^3=\frac{59}{96}a^3$
よって　$V_1:V_2=\frac{37}{96}a^3:\frac{59}{96}a^3=37:59$