高1数学総合SA　確認テスト　前期第2講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点　計10点）

次の和 S を求めよ。

(1)　$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

(2)　$S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}}$

高1数学総合SA　確認テスト　前期第2講【解答】

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点　計10点）

解答　(1)　$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$　　(2)　$\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点　計10点）

解説

(1)　$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$

両辺に 3 を掛けると

$3S=\quad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$

辺々引くと

$$\begin{aligned}S-3S&=2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-2n\cdot 3^n\\&=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot 3^n\\&=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n \qquad \text{」3点}\\&=(1-2n)\cdot 3^n-1\end{aligned}$$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot 3^n-1$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\} \qquad \text{」3点}$$

(2)　$S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}}$

この等式の両辺を 3 で割ると

$$\frac{1}{3}S=\quad\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$$

辺々引くと　$\dfrac{2}{3}S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{n}{3^n}$

よって　$\dfrac{2}{3}S=\dfrac{1\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{3^n}$　　」2点

$$=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot 3^n}$$

したがって　$S=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$　　」2点