高1数学総合SA　確認テスト　前期第6講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$ （(1) 3点　(2) 3点　(3) 4点　計10点）

数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{5}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

高1数学総合SA　確認テスト　前期第6講【解答】

$\boxed{1}$ ((1) 3点　(2) 3点　(3) 4点　計10点)

解答　(1)　$a_n=3^n-2^n$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$　　(3)　$a_n=2^n-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-2$

$\boxed{1}$ ((1) 3点　(2) 3点　(3) 4点　計10点)

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}$

よって　$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$

ここで　$b_1-1=\dfrac{a_1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列となり

$$b_n-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad b_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$$

したがって　$a_n=3^nb_n=3^n\left\{-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}=3^n-2^n$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ ……①とする。

①において，$a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$ であるから，$a_n=0$ となる n があると仮定すると　$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$

ところが $a_1=\dfrac{1}{5}$ $(\neq 0)$ であるから，これは矛盾。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。

①の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4-\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4-b_n$　　これを変形すると　$b_{n+1}-2=-(b_n-2)$

また　$b_1-2=\dfrac{1}{a_1}-2=5-2=3$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は初項3，公比 -1 の等比数列で

$$b_n-2=3\cdot(-1)^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad b_n=3\cdot(-1)^{n-1}+2$$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$

(3)　$a_{n+1}-a_n=2^n-3n+1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は 2^n-3n+1 であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k+1)=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　　$2^1-\frac{3}{2}\cdot 1^2+\frac{5}{2}\cdot 1-2=1$

$a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2$