

1

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \quad \dots\dots ①$$

の解を求めよう。以下では、 $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$ 、 $\beta = 2\theta$ とおく。このとき、①は

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \dots\dots ②$$

となる。

(i) 二つの一般角 α と β が等しければ、 $\sin \alpha$ と $\sin \beta$ は等しい。 $\alpha = \beta$ を満たす θ は

$\frac{\pi}{\text{ア}}$ であり、これは①の解の一つである。そして、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$ のとき

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$$

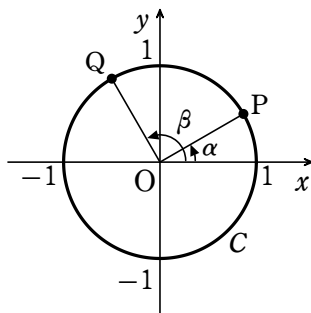
となる。

(ii) 太郎さんと花子さんは、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$ 以外の①の解を求める方法について

話している。

太郎：角が等しくなくても、サインの値が等しくなることがあるね。
 花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか、単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円を C とする。さらに、 α の動径と C との交点を P、 β の動径と C との交点を Q とする。ここで、動径は O を中心とし、その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図

②が成り立つときに、点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として、次の①～③のうち、正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

エ の解答群

- ① 点 P と点 Q は同じ点である。
- ② 点 P の x 座標と、点 Q の x 座標が等しい。
- ③ 点 P の y 座標と、点 Q の y 座標が等しい。
- ④ 点 P と点 Q は、原点 O に関して対称である。

(iii) $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$ とする。

・ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき、 $0 \leq \beta \leq \pi$ であるので、② が成り立つとき、

(ii) で考察したことに注意すると、 α と β は

$$\alpha + \beta = \text{オ}$$

を満たすことがわかる。これより、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときの①の解

$$\theta = \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi$$

を得る。

・ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合を考える。このとき、 $\pi < \beta < 2\pi$ であるので、② が成り立つとき、(ii) で考察したことに注意すると、 α と β は

$$\alpha + \beta = \text{ケ}$$

を満たすことがわかる。これより、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの①の解

$$\theta = \frac{\text{コサ}}{\text{シス}} \pi$$

を得る。

以上より、 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、①の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}, \frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi, \frac{\text{コサ}}{\text{シス}} \pi$$

である。

オ, ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 0	② $\frac{\pi}{2}$	③ π	④ $\frac{3}{2}\pi$
⑤ 2π	⑥ $\frac{5}{2}\pi$	⑦ 3π	⑧ $\frac{7}{2}\pi$

(2) $0 \leq \theta < \pi$ のとき, 方程式

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$$

の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}, \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\pi$$

である。

2

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて常用対数表を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり、メダカの飼育係になった花子さんは、水質を良くする効果がある水草 A を水面に浮かべることにした。一方で、水草 A が増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは、水草 A を定期的に除去することにし、その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

基本方針

- ・水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合 (%) で測ることとし、この量をもとに作業計画を立てる。
- ・作業は正午に行う。

- (1) 水草 A の増え方を知るために、観測を行った。次の表は、観測を開始した日を 0 日目として、0 日目、3 日目、6 日目、9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

観測日(日目)	0	3	6	9
水草 A の量(%)	17.2	22.7	30.0	39.6

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ、いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草 A の量は、3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから、「水草 A の量は、1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え、その倍率を定数 r とした。

観測結果から、3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。このとき、 r は $\boxed{\text{ア}} = 1.32$ を満たす。 $\log_{10} 1.32 = \boxed{\text{イ}}$ であるので

$$\log_{10} r = 0. \boxed{\text{ウエオカ}}$$

が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① r	② $\frac{r}{3}$	③ $3r$	④ r^3	⑤ 3^r	⑥ $\log_3 r$
-------	-----------------	--------	---------	---------	--------------

$\boxed{\text{イ}}$ については、最も適当なものを、次の ⑦ ~ ⑬ のうちから一つ選べ。

⑦ 0.0899	⑧ 0.1206	⑨ 0.1523	⑩ 0.2148
⑪ 0.2405	⑫ 0.3010	⑬ 0.3636	⑭ 0.4771

- (2) 花子さんは、**基本方針**に次の**条件**を加えて、作業計画を立てることにした。

条件

- ・作業は 14 日ごとに行う。
- ・作業の後に残す水草 A の量を，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えない範囲で，できるだけ多くする。

作業の後に残す水草 A の量について考える。

作業を行った日を 0 日目として，次回の作業は 14 日目に行う。なお，作業にかかる時間は考えないものとする。

次のような実数 a を考える。作業の後に残す水草 A の量を a % としたとき，14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60 % になる。

このとき，(1) の定数 r を用いると，14 日目の正午に水草 A の量は a の 倍になるので

$$a \times \text{キ} = \text{クケ} \dots\dots \text{①}$$

が成り立つ。

① の両辺の常用対数を取り，(1) で求めた $\log_{10} r = 0. \text{ウエオカ}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると， $\log_{10} a = \text{コ}$ となる。

a の決め方から，作業の後に残す水草 A の量を a % 以下にすれば，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えないことがわかる。 a 以下で最大の整数は

であることから，花子さんは作業の後に残す水草 A の量を % にすることとした。

の解答群

- ① r ② $\frac{r}{14}$ ③ $14r$ ④ r^{14} ⑤ 14^r ⑥ $\log_{14} r$

については，最も適当なものを，次の ⑦ ~ ⑬ のうちから一つ選べ。

- ⑦ 0.7758 ⑧ 1.0670 ⑨ 1.0934 ⑩ 1.2154
⑪ 1.3410 ⑫ 1.4894 ⑬ 1.7806 ⑭ 2.4666

3

k を 0 でない実数とし、 $f(x)$ を 2 次関数とする。 $F(x)$ と $G(x)$ はどちらも導関数が $f(x)$ であるような関数で、 $F(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとり、 $G(x)$ は $x=k$ で極大値 0 をとるとする。

(1) まず、 $F(x)=2x^3+3x^2$ の場合を考える。

$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$f(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 + \boxed{\text{イ}} x$$

であり、 $F(x)$ は $x = \boxed{\text{ウエ}}$ で極大値をとる。また、 $G(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$G(x) = \boxed{\text{オ}} x^3 + \boxed{\text{カ}} x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と表され、 $G(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。さらに $G(x)$ に関する条件から

$$C = \boxed{\text{クケ}}$$
 である。

(2) 次に、 $k > 0$ の場合を考える。

このとき、 $F(x)$ と $G(x)$ に関する条件から、 $y=F(x)$ のグラフと $F(x)$ 、 $G(x)$ の極値について調べよう。

(i) $F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることから、 $f(0) = \boxed{\text{コ}}$ であり、 $x=0$ の前後で

$f(x)$ の符号は $\boxed{\text{サ}}$ 。さらに、 $G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから、

$f(k) = \boxed{\text{シ}}$ であり、 $x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\text{ス}}$ 。したがって、 $F(x)$ の導関数は $f(x)$ であることに注意すると、座標平面において $y=F(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ であることがわかる。

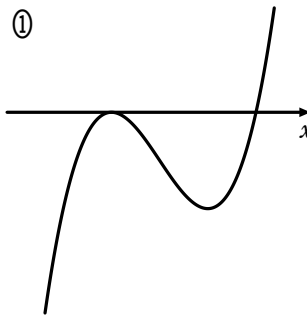
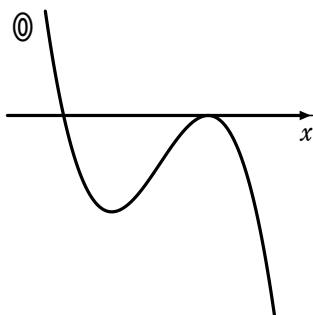
$\boxed{\text{サ}}$ 、 $\boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

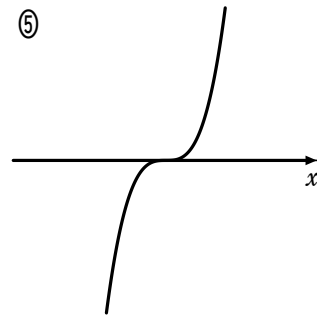
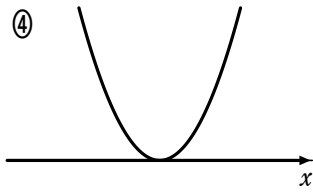
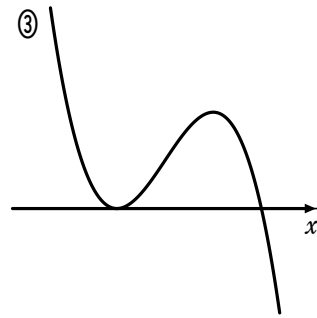
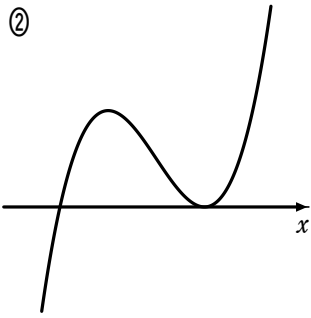
① 負から正に変わる

② 正から負に変わる

③ 変わらない

$\boxed{\text{セ}}$ については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。なお、 y 軸は省略しているが、上方向が正の方向であり、 x 軸は直線 $y=0$ を表している。





(ii) $F(x)$ に関する条件から、すべての実数 x に対して

$$F(x) = \int_{\text{㉓}}^{\text{㉒}} f(t) dt$$

が成り立つ。このことと (i) の考察により、 $F(x)$ の極大値は

$$\int_{\text{㉒}}^{\text{㉑}} f(t) dt$$

と表され、 $F(x)$ の極大値は、関数 $y = \text{㉔}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の

㉔ と等しいことがわかる。

さらに $G(x)$ に関する条件から、 $F(x)$ の極大値は、 $G(x)$ の **㉕** と等しいことがわかる。

㉖ ~ **㉗** の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 0 ② 1 ③ k ④ x

㉔ の解答群

① $f(x)$ ② $F(x)$ ③ $G(x)$

㉔ の解答群

① 面積 ② 面積の -1 倍

ナ の解答群

㊸ 極小値

㊹ 極大値

㊺ 極小値の -1 倍

㊻ 極大値の -1 倍

4

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。ただし、図形の内部は、境界（境界線）を含まないものとする。

例えば、直線 $y = -x + 5$ と x 軸、 y 軸で囲まれた図形を S とする。 S は図 1 の灰色部分であり、 S の内部にある格子点を黒丸、内部にない格子点を白丸で表している。したがって、 S の内部にある格子点の個数は 6 である。

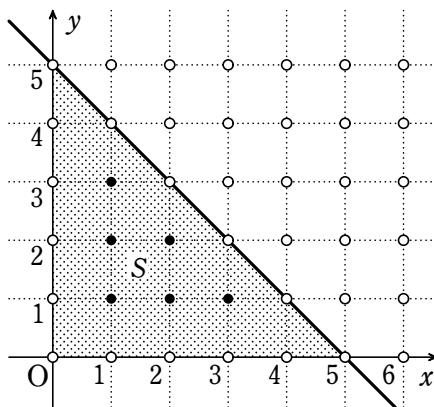


図 1

(1) 直線 $y = 3x$ と x 軸、直線 $x = 21$ で囲まれた図形を T とする。 T の内部にある格子点の個数を考える。

直線 $x = 1$ 上の格子点で T の内部にあるものは、点 $(1, 1)$ と点 $(1, 2)$ の 2 個である。

点 $(1, 0)$ と点 $(1, 3)$ は T の境界にあるため、内部にはない。

n を整数とする。直線 $x = n$ が T の内部にある格子点を通るのは、 $1 \leq n \leq 20$ のときである。 $1 \leq n \leq 20$ のとき、直線 $x = n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数を a_n と

おく。 $a_1 = 2$ であり、 $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $a_3 = \boxed{\text{イ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ が $\boxed{\text{エ}}$ の $\boxed{\text{オ}}$ 数列である。

したがって、 T の内部にある格子点の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

- | | |
|------|------|
| ① 公差 | ② 公比 |
|------|------|

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

- | | |
|------|------|
| ① 等差 | ② 等比 |
|------|------|

(2) n を自然数とする。関数 $y = 2^x$ のグラフと x 軸、 y 軸および直線 $x = n + 1$ で囲まれた図形を U とする。

k を整数とする。直線 $x=k$ が U の内部にある格子点を通るとき、直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

したがって、 U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{ク}}} (\boxed{\text{ケ}}) = \boxed{\text{サ}}$$

である。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- | | | |
|---------------|---------------|-------------|
| ② $2k-2$ | ① $2k-1$ | ② $2k$ |
| ③ $2^{k-1}-2$ | ④ $2^{k-1}-1$ | ⑤ 2^{k-1} |
| ⑥ 2^k-2 | ⑦ 2^k-1 | ⑧ 2^k |

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

- | | | |
|-----------|---------|-----------|
| ② $n-1$ | ① n | ② $n+1$ |
| ③ $2n-1$ | ④ $2n$ | ⑤ $2n+1$ |
| ⑥ 2^n-1 | ⑦ 2^n | ⑧ 2^n+1 |

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | |
|------------------|-----------------|------------------|
| ② 2^n-2n-1 | ① 2^n-2n | ② 2^n-n-1 |
| ③ 2^n-n | ④ 2^n-3 | ⑤ $2^{n+1}-2n-2$ |
| ⑥ $2^{n+1}-2n-1$ | ⑦ $2^{n+1}-n-2$ | ⑧ $2^{n+1}-n-1$ |
| ⑨ $2^{n+1}-3$ | | |

- (3) a, b, c は整数で、 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$ を満たすとする。放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸、 y 軸および直線 $x = n + 1$ で囲まれた図形を V とする。すべての自然数 n に対して、 V の内部にある格子点の個数が n^3 となるのは、 $a = \boxed{\text{シ}}, b = \boxed{\text{スセ}}, c = \boxed{\text{ソ}}$ のときである。

5

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

Q 地域ではレモンを栽培しており、収穫されるレモンを重さによってサイズごとに分類している(表1)。過去に収穫されたレモンの重さは、平均が 110 g, 標準偏差が 20 g の正規分布に従うとする。

表1 レモンのサイズと重さの対応関係

サイズ	レモン1個の重さ
S	80 g 以上 90 g 未満
M	90 g 以上 110 g 未満
L	110 g 以上 140 g 未満
2L	140 g 以上 170 g 未満
その他	80 g 未満または 170 g 以上

- (1) Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ(単位は g)は、過去に収穫されたレモンの重さと同じ分布に従うとする。すなわち、今年収穫される1個のレモンの重さを確率変数 X で表すと、 X は正規分布 $N(110, 20^2)$ に従うとする。よって、今年収穫されるレモンから無作為にレモンを1個抽出するとき、そのレモンが L サイズである確率は、 $P(110 \leq X < 140) = P(110 \leq X \leq 140)$ であることに注意すると、0. アイウエ である。いま、Q 地域で今年収穫されるレモンが 20 万個であるとし、その中の L サイズのレモンの個数を確率変数 Y で表すと、 Y は二項分布に従い、 Y の平均(期待値)は オ となる。

オ については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑦ のうちから一つ選べ。

① 13100	② 13360	③ 31740	④ 68260
⑤ 86640	⑥ 100000	⑦ 168260	⑧ 186640

- (2) 太郎さんと花子さんは、Q 地域で今年収穫されるレモンから何個かを抽出して、今年収穫されるレモンの重さの平均(母平均)を推定する方法について話している。

太郎：母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にして推定したいね。
 花子：母標準偏差を過去と同じ 20 g とすると、何個のレモンの重さを量ればいいかな。
 太郎：信頼区間の式から、必要な標本の大きさを求めてみようよ。

母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさを求める。いま、Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし、その重さの母平均を m g, 母標準偏差を σ g とする。この母集団から無作為に抽出した n 個のレモンの重さを確率変数 W_1, W_2, \dots, W_n で表すと、標本の大きさ n が十分に大きいと

き、標本平均 $\bar{W} = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \dots + W_n)$ は近似的に正規分布 $N(m, \boxed{\text{力}})$ に従う。

また、 m に対する信頼度 95 % の信頼区間を $A \leq m \leq B$ と表すと、信頼区間の幅は $B - A = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}}$ となる。

したがって、母標準偏差を過去と同じ $\sigma = 20$ として、 n に関する不等式

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}} \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす自然数 n を求めればよい。①の両辺は正であるから、両辺を 2 乗して整理すると、 $(\boxed{\text{キ}})^2 \leq 16n$ となる。この不等式を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると、

$n_0 = \boxed{\text{クケコ}}$ である。ゆえに、 m に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさ n のうち、最小のものは $\boxed{\text{クケコ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{力}}$ の解答群

① σ	② $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	③ $\frac{\sqrt{\sigma}}{n}$	④ $\frac{\sigma}{n}$
⑤ σ^2	⑥ $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$	⑦ $\frac{\sigma^2}{n}$	⑧ $\frac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{\text{キ}}$ については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。

① σ	② 1.65 σ	③ 1.96 σ
④ 2 σ	⑤ 3.3 σ	⑥ 3.92 σ

(3) 太郎さんと花子さんは、Q 地域で今年収穫されるレモンの重さについて話している。

太郎：今年のレモンの重さは、他の地域では例年よりも軽そうだと聞いたよ。
 花子：Q 地域でも、過去の平均 110 g と比べて軽いのかな。
 太郎：標本の大きさを 400、母標準偏差を過去と同じ 20 g として、仮説検定を試みようよ。

(2) の m を用いて、Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均 m g が過去の平均 110 g より軽いといえるかを、有意水準 5 % (0.05) で仮説検定を行い検証したい。ただし、標本の大きさは 400、母標準偏差は過去と同じ 20 g とする。ここで、統計的に検証したい仮説を「対立仮説」、対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき、帰無仮説は「 $m = 110$ 」、対立仮説は「 $\boxed{\text{サ}}$ 」である。これら

の仮説に対して、有意水準 5 % で帰無仮説が棄却 (否定) されるかどうかを判断する。いま、帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので、(2) の標本平均 \bar{W} は近似的に正規分布 $\boxed{\text{シ}}$ に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2 g となった。このとき、確率 $P(\bar{W} \leq 108.2)$ は 0. $\boxed{\text{スセソタ}}$ となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5 % より $\boxed{\text{チ}}$ 。したがって、有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと $\boxed{\text{ツ}}$ 。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | |
|----------------|----------------|-------------|
| ② $m < 110$ | ① $m \leq 110$ | ② $m = 110$ |
| ③ $m \geq 110$ | ④ $m > 110$ | |

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

- | | | |
|-------------------|------------------|-----------------|
| ② $N(108.2, 400)$ | ① $N(108.2, 20)$ | ② $N(108.2, 1)$ |
| ③ $N(110, 400)$ | ④ $N(110, 20)$ | ⑤ $N(110, 1)$ |

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

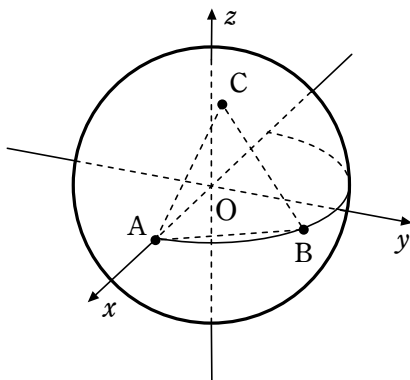
- | |
|---------------------|
| ② 小さいから、帰無仮説は棄却されない |
| ① 小さいから、帰無仮説は棄却される |
| ② 大きいから、帰無仮説は棄却されない |
| ③ 大きいから、帰無仮説は棄却される |

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

- | | |
|---------|----------|
| ② 判断できる | ① 判断できない |
|---------|----------|

6

O を原点とする座標空間において、O を中心とする半径 1 の球面を S とする。S 上に 2 つの点 A (1, 0, 0), B (a, $\sqrt{1-a^2}$, 0) をとる。ただし、a は $-1 < a < 1$ を満たす実数とする。S 上の点 C を、 $\triangle ABC$ が正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



参考図

- (1) 点 C の座標を (x, y, z) とする。C が S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{\text{ア}}$$

である。これをベクトル \overrightarrow{OC} の成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\text{ア}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

さらに、 $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $\triangle OAC$ と $\triangle OAB$ は、対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって、対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x = \boxed{\text{ウ}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる。同様に $\triangle OBC$ と $\triangle OAB$ も合同であるから

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち、これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}}y = \boxed{\text{ウ}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

となる。

逆に、実数 x, y, z が $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を満たすとき、 $C(x, y, z)$ は S 上の点であり、 $\triangle ABC$ は正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

② 0	① 1	② $ \overrightarrow{AB} $
③ $ \overrightarrow{AB} ^2$	④ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	⑤ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$

ウ ~ オ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

② a	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

(2) a に具体的な値を代入して、 $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i) $a = \frac{3}{5}$ のとき、② と ③ を満たす実数 x, y は

$$x = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。この x, y に対して、① を満たす実数 z は サ。したがって、 $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C は サ。

(ii) $a = -\frac{3}{5}$ のときも調べよう。(i) と同様に考えると、 $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C は シ ことがわかる。

サ, シ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

② ない	① ちょうど1つある	② ちょうど2つある
③ ちょうど3つある	④ ちょうど4つある	⑤ 無限に多くある

(3) $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C があるための、 a に関する条件を見つけよう。実数 x, y, z は、①, ②, ③ を満たすとする。② と ③ から

$$x = \boxed{\text{ウ}}, \quad y = \frac{\boxed{\text{ウ}}(1 - \boxed{\text{エ}})}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。このとき、① から

$$z^2 = \boxed{\text{ア}} - x^2 - y^2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{1+a}$$

となる。さらに、 $z^2 \geq 0, 1+a > 0$ であるから ス ≥ 0 である。

逆に、ス ≥ 0 のとき、①, ②, ③ を満たす実数 x, y, z があることがわかる。

以上のことから、セ は、 $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C があるための必要

十分条件である。

ス の解答群

- | | |
|-------------------|--------------------|
| ① $1-2a$ | ⑧ $(1-a)^2$ |
| ② $(1+2a)^2$ | ⑨ $(1+2a)(1-a)$ |
| ③ $(1-2a)(1-a)$ | ⑩ $(1-2a^2)(1+2a)$ |
| ④ $(1+2a^2)(1-a)$ | ⑪ $(1-2a^2)(1-a)$ |

セ の解答群

- | | | |
|---|-----------------------------|--|
| ① $-1 < a < 1$ | ② $-1 < a \leq \frac{1}{2}$ | ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| ④ $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ | ⑤ $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ | ⑥ $\frac{1}{2} \leq a < 1$ |
| ⑦ $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} \leq a < 1$ | | |
| ⑧ $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ | | |