4月8日(水)　春期講習会　中３甲陽PLUS数学　小テスト　　氏名[　　　　　　　　]　　　点/10点

1

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{14}+\omega^{7}+1$　　(2)　$\omega^{2}+\dfrac{1}{\omega^{2}}$

解答　(1)　0　　(2)　-1

解説

ω は $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$

よって　$\omega^3-1=0$　すなわち　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \neq 1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

(1)　$\omega^{14}+\omega^{7}+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

(2)　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega+1=-\omega^2$

よって　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

2

3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $2+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

解答　$a=17$，$b=-13$，他の解は 1，$2-3i$

解説

3 次方程式の解と係数の関係 を利用して

方程式の係数は実数であるから，$2+3i$ と共役な複素数 $2-3i$ も解である。もう 1 つの解を p とすると，解と係数の関係により

$p+(2+3i)+(2-3i)=5$

$(2+3i)p+(2-3i)p+(2+3i)(2-3i)=a$

$(2+3i)(2-3i)p=-b$

それぞれ整理すると

$p+4=5$，$4p+13=a$，$13p=-b$

これを解いて　$p=1$，$a=17$，$b=-13$

したがって，他の解は　1，$2-3i$

3

次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-27$　　(2)　$x^4-4x^2-12=0$

(3)　$x^3-9x^2+23x-15=0$　　(4)　$(x-2)(x-1)x=3\cdot4\cdot5$

解答　(1)　$x=-3$，$\dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$　　(2)　$x=\pm\sqrt{6}$，$\pm\sqrt{2}\,i$　　(3)　$x=1$，3，5

(4)　$x=5$，$-1\pm\sqrt{11}\,i$

解説

(1)　移項すると　$x^3+27=0$

左辺を因数分解して　$(x+3)(x^2-3x+9)=0$　$x+3=0$　または　$x^2-3x+9=0$

ゆえに　$x=-3$，$\dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　左辺を因数分解して　$(x^2+2)(x^2-6)=0$

よって　$x^2+2=0$　または　$x^2-6=0$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{6}$，$\pm\sqrt{2}\,i$

(3)　$P(x)=x^3-9x^2+23x-15$ とすると　$P(1)=1-9+23-15=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-1)(x^2-8x+15)=(x-1)(x-3)(x-5)$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x-3=0$　または　$x-5=0$

よって　$x=1$，3，5

(4)　$P(x)=(x-2)(x-1)x-3\cdot4\cdot5$ とすると　$P(5)=3\cdot4\cdot5-3\cdot4\cdot5=0$

また　$P(x)=x^3-3x^2+2x-60$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-5)(x^2+2x+12)$

$P(x)=0$ から　$x-5=0$　または　$x^2+2x+12=0$

よって　$x=5$，$-1\pm\sqrt{11}\,i$

4

3 次方程式 $x^3-2x^2+x+3=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

解答　(1)　2　　(2)　-7　　(3)　5

解説

解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=2$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$，　$\alpha\beta\gamma=-3$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot1=2$

(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=2(2-1)+3\cdot(-3)=-7$

(3)　$\alpha+\beta+\gamma=2$ から　$\alpha+\beta=2-\gamma$，　$\beta+\gamma=2-\alpha$，　$\gamma+\alpha=2-\beta$

よって　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

また，$x^3-2x^2+x+3=0$ の 3 つの解が α，β，γ であるから

$x^3-2x^2+x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

この両辺に $x=2$ を代入すると　$2^3-2\cdot2^2+2+3=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

ゆえに　$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=5$

したがって　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=5$

別解　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\cdot2+2\cdot1-(-3)=5$

4月8日(水)　春期講習会　中３甲陽PLUS数学　小テスト　　氏名〔　　　　　　　　〕　　点/10点

$\boxed{1}$

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{14}+\omega^{7}+1$　　(2)　$\omega^{2}+\dfrac{1}{\omega^{2}}$

$\boxed{2}$

3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $2+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

$\boxed{3}$

次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-27$　　(2)　$x^4-4x^2-12=0$

(3)　$x^3-9x^2+23x-15=0$　　(4)　$(x-2)(x-1)x=3\cdot 4\cdot 5$

$\boxed{4}$

3 次方程式 $x^3-2x^2+x+3=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$