【定期試験対策講習】

# ３学期
# 学年末考査
# 対策教材①

## 中３六甲数学


【注意事項】

本教材は

数学１「三角比」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

## 【問題】

$\boxed{1}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

(1) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，次の不等式を満たす $\theta$ の範囲を求めよ。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta-1\leqq0$　　(2) $2\cos\theta+1>0$　　(3) $\tan\theta>-1$

$\boxed{4}$

△ABC において，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$A=30^\circ$ のとき，$c$，$B$，$C$ を求めよ。

$\boxed{5}$

△ABC において，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\sin C$ が成り立つとき

(1) △ABC の内角のうち，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2) △ABC の内角のうち，2 番目に大きい角の正接を求めよ。

$\boxed{6}$

△ABC において，$\sin C=\cos B\sin A$ が成り立つとき，△ABC はどのような形をしているか。

$\boxed{7}$

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形の面積を求めよ。

(2) △ABC において，AB=8，AC=5，$\angle$A$=120^\circ$ とする。$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$\boxed{8}$

円 O に内接する四角形 ABCD において，

AB=3，BC=1，CD=3，DA=4

とするとき，次のものを求めよ。

(1) $A$　　(2) 対角線 BD の長さ　　(3) 四角形 ABCD の面積

(4) 円 O の半径　　(5) △ABDの内接円の半径

$\boxed{9}$

次の式の値を求めよ。

(1) $\cos(90^\circ-\theta)\sin(180^\circ-\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$

(2) $\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ-\theta)$

(3) $\cos56^\circ\cos124^\circ+\sin56^\circ\cos146^\circ$

(4) $\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\tan^2 130^\circ$

$\boxed{10}$

AB$=$AC$=$AD$=\sqrt{21}$，BC$=$CD$=$DB$=6$ である三角錐 ABCD において，頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす。このとき，次のものを求めよ。

(1) AH の長さ　　(2) この三角錐の体積

(3) この三角錐の表面積　　(4) この三角錐に内接する球の体積

## 【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=-2\sqrt{3}$

$\boxed{2}$

解答 (1) $(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{3}$

解答 (1) $0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ$，$135^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$　(2) $0^\circ\leqq\theta<120^\circ$

(3) $0^\circ\leqq\theta<90^\circ$，$135^\circ<\theta\leqq180^\circ$

$\boxed{4}$

解答 $c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$ または $c=\sqrt{3}-1$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$

$\boxed{5}$

解答 (1) $150^\circ$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$\boxed{6}$

解答 $A=90^\circ$ の直角三角形

$\boxed{7}$

解答 (1) $2(1+\sqrt{2})$　(2) $\dfrac{40}{13}$

$\boxed{8}$

解答 (1) $A=60^\circ$　(2) $\mathrm{BD}=\sqrt{13}$　(3) $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(4) $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　(5) $\dfrac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$

$\boxed{9}$

解答 (1) 1　(2) 2　(3) $-1$　(4) 1

$\boxed{10}$

解答 (1) 3　(2) $9\sqrt{3}$　(3) $27\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{1}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$　　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ ……①

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(2) $0^\circ<\theta<180^\circ$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$ ……②

① から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

よって，② から　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

$\boxed{2}$

解説

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき，$\cos\theta\geqq0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$90°<\theta\leqq180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{1}{2}>0$ より，$0°<\theta<90°$ であるから　$\cos\theta>0$

ゆえに　$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{3}$

(解説)

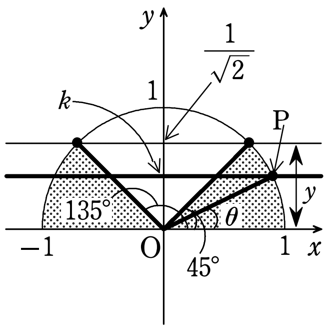
(1)　不等式は　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

$$\theta=45°,\ 135°$$

よって，右の図から，求める $\theta$ の範囲は

$$0°\leqq\theta\leqq45°,\ 135°\leqq\theta\leqq180°$$



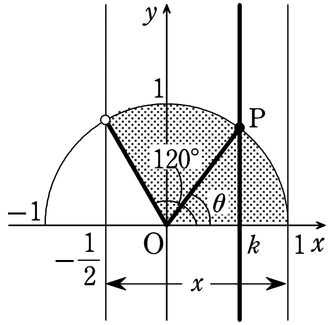

(2)　不等式は　$\cos\theta>-\frac{1}{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解くと

$$\theta=120°$$

よって，右の図から，求める $\theta$ の範囲は

$$0°\leqq\theta<120°$$

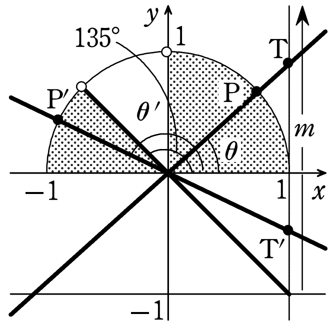



(3)　$\tan\theta=-1$ を解くと

$$\theta=135°$$

よって，右の図から，求める $\theta$ の範囲は

$$0°\leqq\theta<90°,\ 135°<\theta\leqq180°$$




$\boxed{4}$

(解説)

余弦定理により　$(\sqrt{2})^2=2^2+c^2-2\cdot2c\cos30°$

よって　$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$　　したがって　$c=\sqrt{3}\pm1$

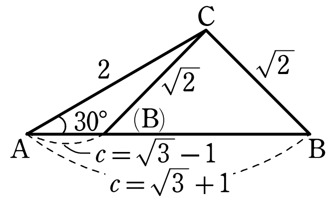
[1]　$c=\sqrt{3}+1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=45°$

よって　$C=180°-(30°+45°)=105°$




[2]　$c=\sqrt{3}-1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=135°$　　よって　$C=180°-(30°+135°)=15°$

以上から　　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$，$C=105°$

　　または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=135°$，$C=15°$

別解　正弦定理から　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}$　　ゆえに　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=30°$ より，$0°<B<150°$ であるから　$B=45°，135°$

[1]　$B=45°$ のとき

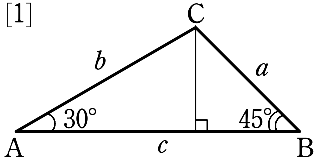
$C=180°-(30°+45°)=105°$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 45°$

$=\sqrt{3}+1$

[1]




[2]　$B=135°$ のとき

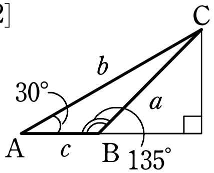
$C=180°-(30°+135°)=15°$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 135°$

$=\sqrt{3}-1$

[2]




5

解説

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ から　　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

条件から　$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{7}:\sqrt{3}:1$

よって　　$a:b:c=\sqrt{7}:\sqrt{3}:1$

ゆえに，$a=\sqrt{7}k$，$b=\sqrt{3}k$，$c=k$ $(k>0)$ とおける。

よって，$a$ が最大の辺であるから，∠A が最大の角である。

余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}k)^2+k^2-(\sqrt{7}k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot k}=\dfrac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，最大の角の大きさは　　$A=150°$

(2)　(1) から，2 番目に大きい角は　　∠B

余弦定理により　　$\cos B=\dfrac{k^2+(\sqrt{7}k)^2-(\sqrt{3}k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{7}k}=\dfrac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B=\frac{1}{\cos^2 B}-1=\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-1=\frac{28}{25}-1=\frac{3}{25}$$

$A>90°$ より $B<90°$ であるから　　$\tan B>0$

したがって　　$\tan B=\sqrt{\dfrac{3}{25}}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

6

解説

△ABC の外接円の半径を $R$ とする。

正弦定理により　　$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

余弦定理により　　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを等式 $\sin C=\cos B\sin A$ に代入すると

$$\frac{c}{2R}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a}{2R}\quad すなわち\quad \frac{c}{2R}=\frac{c^2+a^2-b^2}{4cR}$$

両辺に $4cR$ を掛けて　　$2c^2=c^2+a^2-b^2$　　すなわち　　$b^2+c^2=a^2$

よって，△ABC は $A=90°$ の直角三角形である。

7

解説

(1)　図のように，正八角形を 8 個の合同な三角形に分け，3 点

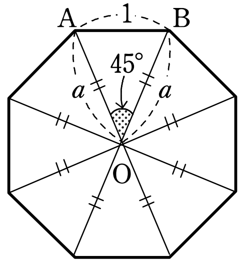
O，A，B をとると　　$\angle AOB=360°\div 8=45°$

$OA=OB=a$ とすると，余弦定理により

$1^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos 45°$

整理して　　$(2-\sqrt{2})a^2=1$

ゆえに　　$a^2=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$



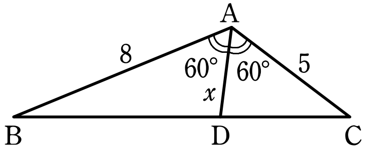
よって，求める面積は　$8\triangle \mathrm{OAB}=8\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 45^\circ=2(1+\sqrt{2})$

(2)　$\mathrm{AD}=x$ とする。$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot\sin 60^\circ$$

よって　$40=8x+5x$

これを解いて　$x=\mathrm{AD}=\frac{40}{13}$




8

解説

(1)　$\mathrm{BD}=x$ とする。$\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

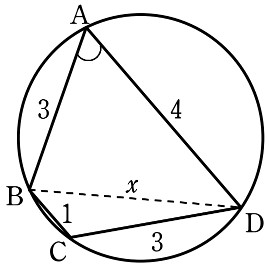
四角形 ABCD は円に内接するから　$C=180^\circ-A$

$\triangle\mathrm{BCD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2=1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cos(180^\circ-A)$$
$$=1^2+3^2+2\cdot 1\cdot 3\cos A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$25-24\cos A=10+6\cos A$

よって　$\cos A=\frac{1}{2}$　　したがって　$A=60^\circ$




(2)　① より　$x^2=9+16-24\cos 60^\circ=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$　　よって　$\mathrm{BD}=\sqrt{13}$

(3)　$A=60^\circ$ より　$C=120^\circ$

四角形 ABCD の面積を $S$ とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\sin 120^\circ$$

$$=\frac{12\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(4)　円 O は$\triangle\mathrm{ABD}$の外接円である。求める半径を $R$ とすると

正弦定理より，$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=2R$　　$\therefore$　$R=\frac{\sqrt{13}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

(5)　$\triangle\mathrm{ABD}$ の内接円の半径を $r$ とすると

$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA})$$

より　$\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times r\times(3+4+\sqrt{13})$

$$r=\frac{3\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7+\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}=\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$$

9

解説

(1)　$(与式)=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2)　$(与式)=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$
$$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$$

(3)　$\cos 124^\circ=\cos(180^\circ-56^\circ)=-\cos 56^\circ$

$\cos 146^\circ=\cos(90^\circ+56^\circ)=-\sin 56^\circ$

よって　$(与式)=\cos 56^\circ(-\cos 56^\circ)+\sin 56^\circ(-\sin 56^\circ)$

$$=-\cos^2 56^\circ-\sin^2 56^\circ$$
$$=-(\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ)=-1$$

(4)　$\tan 130^\circ=\tan(90^\circ+40^\circ)=-\frac{1}{\tan 40^\circ}$

よって　$(与式)=\frac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\frac{1}{\tan 40^\circ}\right)^2=\frac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^2$

$$=\frac{1}{\sin^2 40^\circ}-\frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{1-\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=1$$

10

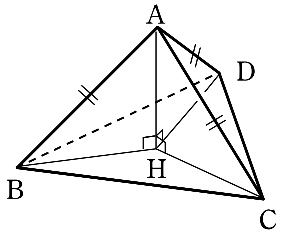
解説

(1) △ABH，△ACH，△ADH はいずれも直角三角形で

$AB=AC=AD$，　AH は共通

であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって，$BH=CH=DH$ であるから，H は △BCD (正三角形) の外接円の中心である。




ゆえに，△BCDにおいて，正弦定理により

$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2\cdot BH$$

よって　　$BH=\frac{6}{2\sin 60^\circ}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

したがって，三平方の定理により

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{9}=3$$

(2) $\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

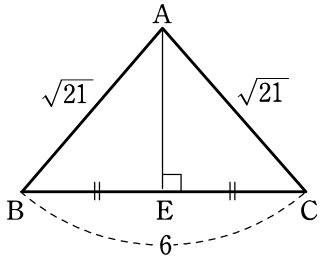
よって，三角錐 ABCD の体積を $V$ とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$$

(3) △ABC は $AB=AC$ の二等辺三角形であるから，

A から辺 BC に下ろした垂線を AE とすると

$$BE=CE=\frac{6}{2}=3$$




よって，三平方の定理により

$$AE=\sqrt{(\sqrt{21})^2-3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

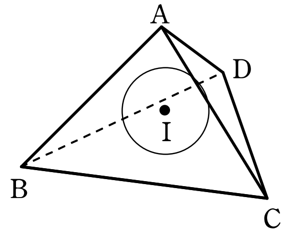
ゆえに　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

同様に　　$\triangle ACD=\triangle ADB=6\sqrt{3}$

したがって，三角錐 ABCD の表面積を $S$ とすると

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB+\triangle BCD$$
$$=3\times 6\sqrt{3}+9\sqrt{3}=27\sqrt{3}$$

(4) 内接する球の中心を I，半径を $r$ とすると




$$V=(\text{三角錐 IABC})+(\text{三角錐 IACD})+(\text{三角錐 IADB})+(\text{三角錐 IBCD})$$
$$=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot r+\frac{1}{3}\triangle ACD\cdot r+\frac{1}{3}\triangle ADB\cdot r+\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot r$$
$$=\frac{1}{3}(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB+\triangle BCD)r=\frac{1}{3}Sr$$

よって，(2)，(3) の結果から　　$9\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}\cdot r$　　　ゆえに　　$r=1$

したがって，求める球の体積は　　$\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$