$\boxed{1}$

解説

2 倍角の公式により　$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-2$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\dfrac{4}{15}$ であるから　$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-2=\dfrac{4}{15}$

よって　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{{}^{\text{アイ}}17}{{}^{\text{ウエ}}15}$

また，② から　$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{2^2\cdot 15}{15^2}=\dfrac{{}^{\text{オ}}4}{15}$

したがって，解と係数の関係により，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ は，t に関する 2 次方程式

$t^2-\dfrac{17}{15}t+\dfrac{4}{15}=0$ の解である。

これを解くと　$15t^2-17t+4=0$

$(5t-4)(3t-1)=0$

よって　$t=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1}{3}$

条件 ③ より，$|\cos\alpha|\geqq|\cos\beta|$ であるから　$\cos^2\alpha\geqq\cos^2\beta$

よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{{}^{\text{カ}}4}{{}^{\text{キ}}5}$，$\cos^2\beta=\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}3}$

② より，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は異符号である。

また，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$\alpha<\beta$ より，$\cos\beta<\cos\alpha$ であるから

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

したがって　$\cos\alpha=\dfrac{{}^{\text{コ}}2\sqrt{{}^{\text{サ}}5}}{{}^{\text{シ}}5}$，$\cos\beta=\dfrac{{}^{\text{ス}}-\sqrt{{}^{\text{セ}}3}}{{}^{\text{ソ}}3}$

$\boxed{2}$

解説

真数の条件により，$p > {}^{\text{ア}}0$ である。

線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot p}{1+2},\ \frac{2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\log_2 p}{1+2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}3}p,\ \frac{{}^{\text{エ}}1}{{}^{\text{オ}}3}\log_2 p+{}^{\text{カ}}1\right)$$

これが C の座標と一致するから $\begin{cases} \dfrac{1}{3}p=q & \cdots\cdots ④ \\ \dfrac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$ が成り立つ。

⑤ から　$\log_2 p^{\frac{1}{3}}+\log_2 2=\log_2 q$

よって　$2p^{\frac{1}{3}}=q$　　すなわち　$p=\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}8}q^{{}^{\text{ケ}}3}$

これと，④ より　$p=\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{1}{3}p\right)^3$

よって　$p^3-6^3p=0$　　すなわち　$p(p^2-6^3)=0$

$p>0$ より　$p={}^{\text{コ}}6\sqrt{{}^{\text{サ}}6}$

したがって　$q=\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{6}={}^{\text{シ}}2\sqrt{{}^{\text{ス}}6}$

また，C の y 座標 $\log_2(2\sqrt{6})$ について

$$\log_2(2\sqrt{6})=\log_2 2+\log_2\sqrt{6}=1+\frac{1}{2}\log_2 6=1+\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3)$$

$$=1+\frac{1}{2}(1+\log_2 3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3$$

ここで，底の変換公式により　$\log_2 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$　であるから

$$\log_2(2\sqrt{6})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}+\frac{\log_{10}3}{2\log_{10}2}=1.5+\frac{0.4771}{2\times 0.3010}=2.2925\cdots$$

よって，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると　2.3　（${}^{\text{セ}}$ ⑥）

$\boxed{3}$

(解説)

(1) 確率変数 W は，n 回の反復試行において事象 A が起こる回数を表しているから，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

よって　　$m=np,\ \sigma=\sqrt{np(1-p)}$

条件から　　$np=\dfrac{1216}{27}$ ……①，　$\sqrt{np(1-p)}=\dfrac{152}{27}$ ……②

② から　　$np(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$

ゆえに，① から　　$\dfrac{1216}{27}(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$　　すなわち　　$1-p=\dfrac{152^2}{27^2}\cdot\dfrac{27}{1216}$

よって　　$1-p=\dfrac{19}{27}$　　ゆえに　　$p=1-\dfrac{19}{27}=\dfrac{^{\text{エ}}8}{^{\text{オカ}}27}$

したがって，① から　　$n=\dfrac{1216}{27}\cdot\dfrac{27}{8}={}^{\text{アイウ}}152$

(2) $W\geqq 38$ となる確率を求める場合，n は大きいと考えられるので，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 W は，近似的に正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\sigma>0$ であるから，$W\geqq 38$ のとき　　$\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq\dfrac{38-m}{\sigma}=\dfrac{38-\dfrac{1216}{27}}{\dfrac{152}{27}}=-1.25$

よって　　$P(W\geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq -{}^{\text{キ}}1.{}^{\text{クケ}}25\right)$

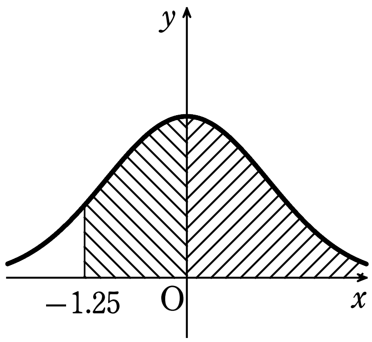
さらに，標準正規分布の分布曲線が y 軸に関して対称であることから

$$P(Z\geqq -1.25)=P(Z\geqq 0)+P(-1.25\leqq Z\leqq 0)$$
$$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.25)$$

ここで，正規分布表より　$P(0\leqq Z\leqq 1.25)=0.3944$ であるから

$$P(Z\geqq -1.25)=0.5+0.3944=0.8944$$

よって　　$P(Z\geqq -1.25)=0.{}^{\text{コサ}}89$



(3) 確率変数 X について，$a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a$ となる確率 $P\left(a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a\right)$ は

$$P\left(a\leqq X\leqq\frac{3}{2}a\right)=\int_a^{\frac{3}{2}a}f(x)\,dx=\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{1}{3a^2}(2a-x)\,dx=\frac{1}{3a^2}\left[2ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$=\frac{1}{3a^2}\left[\left\{2a\cdot\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right\}-\left(2a\cdot a-\frac{1}{2}a^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{3}{8}a^2=\frac{{}^{シ}1}{{}^{ス}8}$$

また，確率変数 X の平均は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a}xf(x)dx=\int_{-a}^{0}x\cdot\frac{2}{3a^2}(x+a)dx+\int_{0}^{2a}x\cdot\frac{1}{3a^2}(2a-x)dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0}x(x+a)dx+\frac{1}{3a^2}\int_{0}^{2a}x(2a-x)dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left[-\frac{1}{6}\{0-(-a)\}^3\right]+\frac{1}{3a^2}\left\{\frac{1}{6}(2a-0)^3\right\}=-\frac{a}{9}+\frac{4a}{9}=\frac{{}^{セ}a}{{}^{ソ}3}$$

確率変数 Y は $Y=2X+7$ を満たすから

$$E(Y)=E(2X+7)=2E(X)+7=2\cdot\frac{a}{3}+7=\frac{{}^{タチ}2a}{{}^{ツ}3}+{}^{テ}7$$

$\boxed{\text{参考}}$　連続型確率変数 X と定数 a，b に対しても，$Y=aX+b$ とすると，Y も確率変数となり，Y の平均 (期待値) $E(Y)$，分散 $V(Y)$ について

$$E(Y)=aE(X)+b,\ V(Y)=a^2V(X)$$

が成り立つ。

$\boxed{4}$

解説

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{m}{2}|\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2=\dfrac{m}{n}|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\dfrac{mn}{4}$

$0\leqq\cos^2\theta\leqq1$ から　$0\leqq mn\leqq4$

m，n は $0<m\leqq n$ を満たす整数であるから　$(m, n)=(1, 1)$，$(1, 2)$，$(1, 3)$，$(1, 4)$

または　$(2, 2)$　　よって，このとき，$\cos^2\theta$ の値はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，1 であり，

したがって，$\cos\theta\ (>0)$ の値は $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，1 である．

よって，θ の値はそれぞれ $60°$，$45°$，$30°$，$0°$ である．

ゆえに，$\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{n}{m}$ であるから $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\sqrt{\dfrac{n}{m}}=k$ とおくと

$\theta=60°$ のとき　$k=1$　$(m, n)=(1, 1)$

$\theta=45°$ のとき　$k=\sqrt{2}$　$(m, n)=(1, 2)$

$\theta=30°$ のとき　$k=\sqrt{3}$　$(m, n)=(1, 3)$

$\theta=0°$ のとき　$k=2, 1$　$(m, n)=(1, 4)$，$(2, 2)$