

7月3日 期末試験直前対策(数学K)

- 1 右の図のように、ある街には東西に 6 本、南北に 7 本の道がある。

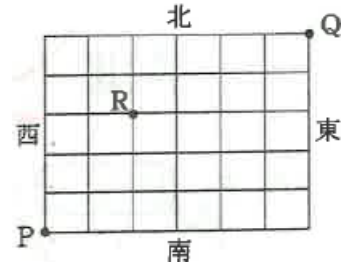
P から R を通って Q まで行く最短経路について、

- (1) 何通りかを求めたいとき、次を用いて立式せよ。

- (ア) C (イ) 階乗
(ウ) H (東西の道) (エ) H (南北の道)

- (2) (1)の(ア)~(エ)のいずれかを解き、何通りかを求めよ。

- (3) 各交差点で、東か北かのどちらに行くかは等確率、一方しか行けないときは確率 1 でその方向へ進むとしたときの R を通る確率を求めよ。



- 2 次の条件を満たす整数の解(a, b, c)の個数を求めよ。

- (1) $0 < a < b < c < 7$ (2) a, b, c はすべて 1 以上 6 以下で、どの 2 つも異なる。
(3) $0 \leq a \leq b \leq c \leq 7$

- 3 次の個数のサイコロを同時に投げるとき、出る目の和や積が次のようになる確率を求めよ。

ただし、順列をすべて書き出す解法は禁ずる。

- (1) 3 個、目の和が 8 (2) 4 個、目の和が 9 (3) 10 個、目の積が偶数

- 4 15 本のくじの中に当たりくじが 5 本ある。このくじを同時に 5 本引く(または 1 本ずつ引きもとに戻さないことを 5 回繰り返す)とき、当たりくじが 3 本含まれる確率を、次のように立式した。式を完成させよ。

(1)
$$\frac{C \cdot C}{C}$$

(2)
$$\frac{P \cdot P \times}{P}$$

(3)
$$\frac{C \cdot C \times}{P}$$

(4)
$$\frac{\cdot \cdot \cdot \cdot \times C}{\cdot \cdot \cdot \cdot}$$

- 5 女子 A, B, C, D, 男子 E, F, G, H の 8 人が、次のように並ぶ確率を求めよ。

- (1) 横 1 列に並べるとき、A は B より左に、B は C より左にいる
(2) 円形に並べるとき、A と B が向かい合う(時計の 12 時と 6 時の位置)
(3) 円形に並べるとき、女子と男子が交互に並ぶ

〔6〕 A, B, C, D の 4 人がじゃんけんを 1 回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) A だけが負ける (2) 2 人だけが勝つ (3) あいこ

〔7〕 1 個のさいころを 3 回投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 個は 2 の目 (2) 何回目かにその回の番号と同じ目
(3) 少なくとも 2 個の目は等しい

〔8〕 三択問題(3 つの選択肢から正答を 1 つ選ぶ問題) 6 題にでたらめに答えるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 奇数回目の試行で正解, 偶数回目の試行で不正解 (2) 正解が 5 題以上
(3) 6 題目に 3 度目の正解

〔9〕 箱の中に, 1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードが入っている。この箱の中からカードを 1 枚取り出し, 書かれた数字を記録して箱の中に戻す。この操作を 3 回繰り返すとき, 記録された数字について, 次の確率を求めよ。

- (1) 最大値が 1 (2) 最大値が 5 (3) 最小値が 5

〔10〕 各根元事象が同様に確からしい試行において, その全事象を U ($\neq \phi$) とし, U の要素からなる 2 つの事象を A, B とおく。次の証明せよ。

- (1) 2 事象の和事象の確率 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(2) 2 事象 A, B が互いに排反である…… (*) とき, 確率の加法定理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

〔11〕 (1), (2), (3)においてそれぞれ次の(ア), (イ)を解け。確率の算出は不要。

(ア) 事象を文字で定め, 各間の確率を $P(A \cup B)$, $P_A(B)$ などと表せ。ただし, (イ)の式が完成できるような事象の定め方をすること。

(イ) (ア)で表した各間の確率を変形したとき, 空欄に当てはまる事象を書き込め。ただし, 何も書くべきではないときには×を記入せよ。

- (1) ある鉄道の乗客のうち, 全体の a %が定期券利用者で, 全体の b %が学生の定期券利用者である。定期券利用者の中から 1 名を選び出すとき, その人が学生である確率。

(ア) (イ) $P_{\square}(\square) = \frac{P(\square)}{P(\square)}$

- (2) 当たりくじ a 本を含む b 本のくじの中から, 引いたくじはもとに戻さないで 1 本ずつ 3 回続けてくじを引くとき, 3 本とも当たる確率。

(ア)

(イ) $P_{\square}(\square) = P_{\square}(\square) \cdot P_{\square}(\square) \cdot P_{\square}(\square)$

- (3) 当たりくじ a 本を含む b 本のくじの中から、引いたくじはもとに戻さないで A, B の 2 人がこの順に 1 本ずつくじを引くとき、B が当たる確率。

(ア)

$$\begin{aligned} \text{(イ)} \quad P(\square) &= P(\square) + P(\square) \\ &= P(\square) \cdot P(\square) + P(\square) \cdot P(\square) \end{aligned}$$

- [12] 袋 A には赤玉 3 個と青玉 2 個、袋 B には赤玉 7 個と青玉 3 個が入っている。袋 A から 1 個、袋 B から 2 個の玉を取るとき、玉の色が全て同じである確率を求めよ。ただし、何が独立か、何が互いに排反かを明確に記述すること。また、[11]の(ア), (イ)のような記述は不要である。

- [13] ある電器店が、A 社、B 社、C 社から同じ製品を仕入れた。A 社、B 社、C 社から仕入れた比率は 4 : 3 : 2 であり、製品が不良品である比率はそれぞれ 3 %, 4 %, 5 %であるという。いま、大量にある 3 社の製品をよく混ぜ、その中から 1 個抜き取って調べたところ、不良品であった。これが A 社から仕入れたものである確率を求めよ。ただし、[11]の(ア), (イ)のような記述をすること。

- [14] 白玉 3 個、黒玉 2 個が入っている袋があり、取り出した玉はもとに戻さずに玉を 1 個ずつ 3 回取り出す。このときの白玉の個数を X とし、1, 2, 3 回目に引いた玉が白玉である事象をそれぞれ A , B , C とする。

- (1) 「1, 2 回目に引いた玉がともに黒玉であるとき、3 回目に引いた玉が白玉である確率は 1 である。」を式で表せ。
- (2) 確率 $P(X=1)$ を求めよ。
- (3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

7月3日 期末試験直前対策(数学K)【解答】

□ (1)(ア) ${}_5C_2 \cdot {}_6C_2$ (イ) $\frac{5!}{2 \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2}$

(ウ)(東西の道) P から R : 異なる 4 本から重複を許し 2 本取る組合せ

R から Q : 異なる 3 本から重複を許し 4 本取る組合せより ${}_4H_2 \cdot {}_3H_4$

(エ)(南北の道) P から R : 異なる 3 本から重複を許し 3 本取る組合せ

R から Q : 異なる 5 本から重複を許し 2 本取る組合せより ${}_3H_3 \cdot {}_5H_2$

(2) 150 (通り)

(3) P から R まで $\rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow$ と進むのは $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ より, 並び替えて ${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

□

(1) 異なる 6 数の 1~6 から 3 数を選べばすべて異なり, 小さい順に a, b, c とすることで,

$0 < a < b < c < 7$ を満たす解 (a, b, c) が 1 つできる。よって ${}_6C_3 = 20$ (通り)

(2) 異なる 6 数の 1~6 から 3 数を選べば全て異なり, さらにこれらを一列に並べ, 順に a, b, c とすることで, a, b, c はすべて 1 以上 6 以下で, どの 2 つも異なる解 (a, b, c) が 1 つできる。

よって, ${}_6P_3 = 120$ (通り) ((1)より $20 \times 3!$ でも可)

(3) 異なる 8 数の 0~7 から重複を許して 3 数を選び, 大きくない順に a, b, c とすることで,

$0 \leq a \leq b \leq c \leq 7$ を満たす解 (a, b, c) が 1 つできる。よって ${}_8H_3 = {}_{10}C_3 = 120$ (通り)

□

(1) 3 個のサイコロを区別し, 大, 中, 小とする。8 つの○の間の 7 つに仕切りを 2 つ入れると

3 つのゾーンに分かれ, この左, 中, 右のゾーンをそれぞれ大, 中, 小の目と考えると, それぞれの

ゾーンで○が 6 つを超えることはないから $\frac{{}_7C_2}{6^3} = \frac{7}{72}$

(2) 4 個のサイコロを区別し, 特大, 大, 中, 小とする。9 つの○の間の 8 つに仕切りを 3 つ入れると

4 つのゾーンに分かれ, この左, 中 1, 中 2, 右のゾーンをそれぞれ特大, 大, 中, 小の目と考えると

それぞれのゾーンで○が 6 つを超えることはないから $\frac{{}_8C_3}{6^4} = \frac{7}{162}$

(3) 1 個のサイコロの偶・奇の出る確率はともに $\frac{1}{2}$ より, 偶・奇が出るのは同様に確からしい。

よって, 全事象を 2^{10} 通りと考えると, 余事象の目の積が奇数となるのは 10 個すべてが奇数より

1 通り。よって, 余事象の確率より $1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$

4

$$(1) \frac{{}_5C_3 \cdot {}_{10}C_2}{{}_{15}C_5} \quad (2) \frac{{}_5P_3 \cdot {}_{10}P_2 \times {}_5C_2}{{}_{15}P_5} \quad (3) \frac{{}_5C_3 \cdot {}_{10}C_2 \times 5!}{{}_{15}P_5} \quad (4) \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \times {}_5C_2}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}$$

5

(1) A, B, C を同じ文字○と考えて、3 個の○と残り 5 文字 D, E, F, G, H の順列を作り、最後に 3 個の○に左から A, B, C を入れると、条件を満たす順列ができる。文字が入る 8 席から、

D, E, F, G, H が入る 1 席をそれぞれ選ぶと、残りの 3 席が○となる。よって $\frac{{}_8P_5}{8!} = \frac{1}{6}$

(2) 向かい合う A と B を固定すると、残り 6 人の順列を考え $6!$ 通り。よって $\frac{6!}{(8-1)!} = \frac{1}{7}$

(3) 最初に女子 4 人の円順列を考え $(4-1)!$ 通り。その間 4 つに男子の順列を考え $4!$ 通り
よって $\frac{(4-1)! \cdot 4!}{(8-1)!} = \frac{1}{35}$

6

(1) A だけが負けるのは、何の手で負けるかで 3 通り。よって $\frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}$

(2) 2 人だけ勝つのは、誰が勝つか ${}_4C_2$ 通り、その勝つ 2 人が何の手で勝つか ${}_3C_1$ 通り

$$\text{よって } \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{3^4} = \frac{2}{9}$$

(3) 1 人だけが勝つ……①のは、誰が勝つか ${}_4C_1$ 通り、その勝つ 1 人が何の手で勝つか ${}_3C_1$ 通り

$$\text{よって } \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{3^4} = \frac{4}{27}$$

3 人だけが勝つ……②のは 1 人負けであるから、同様に考えて $\frac{4}{27}$

あいこは、①, ②, (2) の和事象の余事象より $1 - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{2}{9} = \frac{13}{27}$

7

(1) 「少なくとも 1 個は 2 の目が出る」という事象は、「3 回とも 2 以外の目が出る」という事象の

$$\text{余事象より } 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$$

(2) 「何回目かにその回の番号と同じ目」という事象は、「どの回にもその回の番号と同じ目が出ない」

$$\text{という事象の余事象より } 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$$

(3) 「少なくとも 2 個の目は等しい」という事象は、「3 個の目が全て異なる」という事象の余事象より

$$1 - \frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{4}{9}$$

8 1回の試行で正解の確率は $\frac{1}{3}$ ，不正解の確率は $\frac{2}{3}$ である。

$$(1) \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{729}$$

(2) 正解が5題以上は、2事象「正解が5題」「正解が6題」の和事象で、これら2事象は互いに排反である。反復試行と確率の加法定理より ${}_6C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{13}{729}$

(3) 5題目までに正解が2題、不正解が3題で、6回目に正解である。反復試行より ${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{80}{729}$

9

(1) 最大値が1とは、3回とも1を取る事なので $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

(2) 最大値が5以下の確率は、すべてのカードが5以下より $\left(\frac{5}{10}\right)^3$

最大値が4以下の確率は、すべてのカードが4以下より $\left(\frac{4}{10}\right)^3$

よって、最大値が5である確率は $\left(\frac{5}{10}\right)^3 - \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{61}{1000}$

(3) 最小値が5以上の確率は、すべてカードが5以上より $\left(\frac{6}{10}\right)^3$

最小値が6以上の確率は、すべてカードが6以上より $\left(\frac{5}{10}\right)^3$

よって、最大値が5である確率は $\left(\frac{6}{10}\right)^3 - \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{91}{1000}$

10

(1) **証明** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ であるから、この各辺を $n(U) (\neq 0, \because U \neq \phi)$ で割って、

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \quad \text{ここで、} P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)}, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad \text{であり、}$$

これらと同様に考えて $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ である。

(2) **証明** (*) より $A \cap B = \phi$ であるから、 $P(A \cap B) = 0$

これを(1)で証明した $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ へ代入し、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ である。

11

(1)(ア) 乗客全体から選出された1人が、

定期券利用者であるという事象を A ，学生であるという事象を B とおく。求める確率は、事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率であるから、条件つき確率であり $P_A(B)$

$$(イ) P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(2)(ア) 1本目, 2本目, 3本目が当たるという事象をそれぞれ A, B, C とおく。求める確率は, 3本とも当たるという事象より A と B と C の積事象 $A \cap B \cap C$ が起こる確率であるから $P(A \cap B \cap C)$

$$(イ) P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

(3)(ア) A, B が当たるという事象をそれぞれ A, B とおく。

求める確率は, B が当たる確率であるから $P(B)$

(イ) 事象 B は, 2事象「 A が当たり B も当たる」「 A がはずれ B が当たる」の和事象であり, これらは互いに排反であるから $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

$$\boxed{12} \quad \text{確率の加法定理より} \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{23}{75}$$

$\boxed{13}$ 抜き取った製品が A, B, C 社の製品であるという事象を, それぞれ A, B, C とし, 抜き取った

製品が不良品という事象を E とする。求める確率は $P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$

$$\text{分子は} \quad P(A \cap E) = P(A) \cdot P_A(E) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{100} = \frac{12}{900}$$

$$\begin{aligned} \text{分母は} \quad P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) = P(A) \cdot P_A(E) + P(B) \cdot P_B(E) + P(C) \cdot P_C(E) \\ &= \frac{12}{900} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{100} + \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{100} = \frac{34}{900} \end{aligned}$$

$$\text{以上より} \quad P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{12}{900}}{\frac{34}{900}} = \frac{6}{17}$$

$$\boxed{14} \quad (1) P_{\bar{A} \cap \bar{B}}(C) = 1$$

(2) 「取り出した玉はもとに戻さずに玉を1個ずつ3回取り出す」という試行は「同時に3個の玉を取り出す」という試行と同じである。確率 $P(X=1)$ は, 白玉1個, 黒玉2個を取り出す確率であり,

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

$$(3) \quad (2) \text{と同様に考えて,} \quad P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{6}{10}, \quad P(X=3) = \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

以上より, 期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{6}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$