

1

a を正の定数とする. 不等式 $a^x \geq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ.

2

a, b を正の実数とする. 空間内の2点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線を l とする. 直線 l を x 軸の周りに1回転して得られる図形を M とする.

- (1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ.
- (2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ.
- (3) 図形 M と2つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

3

n を2以上の自然数とする. x^{2n} を $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする. すなわち, x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとす. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.

4

N を自然数とする. $N+1$ 個の箱があり, 1から $N+1$ までの番号が付いている. どの箱にも玉が1個入っている. 番号1から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である. 次の操作(A)を, おのおのの $k=1, 2, \dots, N+1$ に対して, k が小さい方から順番に1回ずつ行う.

- (A) k 以外の番号の N 個の箱から1個の箱を選び, その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する. ただし, N 個の箱から1個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする.

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ.