$\boxed{1}$

(解説)

$9a^2-6a+1=({}^{ア}3a-{}^{イ}1)^2$

よって　$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$

[1]　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき

$3a-1>0$，$a+2>0$ であるから　$A=3a-1+a+2={}^{ウ}4a+{}^{エ}1$

[2]　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき

$3a-1\leqq 0$，$a+2\geqq 0$ であるから　$A=-(3a-1)+a+2$

$=-3a+1+a+2={}^{オカ}-2a+{}^{キ}3$

[3]　$a<-2$ のとき

$3a-1<0$，$a+2<0$ であるから　$A=-(3a-1)-(a+2)$

$=-3a+1-a-2=-4a-1$

(1)　$8<9$ より $2\sqrt{2}<3$ であるから　$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}>\dfrac{1}{3}$

よって　$A=4a+1=4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+1=\sqrt{{}^{ク}2}+{}^{ケ}1$

(2)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=-2a+3$

$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ の各辺に -2 を掛けると　$-\dfrac{2}{3}\leqq-2a\leqq 4$

各辺に 3 を足すと　$\dfrac{7}{3}\leqq-2a+3\leqq 7$　すなわち　$\dfrac{{}^{コ}7}{{}^{サ}3}\leqq A\leqq{}^{シ}7$

(3)　[1]　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$

これを解いて　$a=6$　これは $a>\dfrac{1}{3}$ を満たす。

[2]　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$

これを解いて　$a=-\dfrac{5}{2}$　これは $-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ を満たさない。

[3]　$a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$

これを解いて　$a=-\dfrac{7}{3}$　これは $a<-2$ を満たす。

以上より，$A=2a+13$ となる a の値は　　$a=^{ス}6,\ \dfrac{^{セソ}-7}{^{タ}3}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$\overline{p}$：m と n の少なくとも一方は偶数である。

2 つの自然数 m，n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。

このとき，m が奇数ならば n は偶数である。(ア ⓪)

また，m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい。(イ ②)

(2)　$p \Longrightarrow q$ は真。

$3mn$ が奇数であるとき，mn は奇数であるから，m と n はともに奇数である。

したがって，$q \Longrightarrow p$ は真。

よって，p は q であるための必要十分条件である。(ウ ⓪)

$p \Longrightarrow r$ は真。

$r \Longrightarrow p$ は偽。(反例：$m=2$，$n=2$)

よって，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(エ ②)

$\overline{p} \Longrightarrow r$ は偽。(反例：$m=1$，$n=2$)

$r \Longrightarrow \overline{p}$ は偽。(反例：$m=1$，$n=1$)

よって，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。(オ ③)

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$

$$=\left\{x+\left(a-\frac{b}{2}\right)\right\}^2-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+a^2+1$$

$$=\left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+a^2+1$$

$$=\left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\frac{b^2}{4}+ab+1$$

よって，グラフ G の頂点の座標は　　$\left(\dfrac{b}{^{ア}2}-a,\ -\dfrac{b^2}{^{イ}4}+ab+^{ウ}1\right)$

(2)　グラフ G が x 軸と共有点をもつとき　　$-\dfrac{b^2}{4}+ab+1\leqq 0$

すなわち　　$b^2-4ab-4\geqq 0$　……①

2 次方程式 $b^2-4ab-4=0$ を解くと

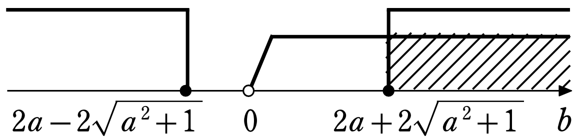
$$b=-(-2a)\pm\sqrt{(-2a)^2-1\cdot(-4)}=2a\pm2\sqrt{a^2+1}$$

よって，① の解は　　$b\leqq 2a-2\sqrt{a^2+1}$，$2a+2\sqrt{a^2+1}\leqq b$

$a<\sqrt{a^2+1}$ より

$$2a-2\sqrt{a^2+1}<0$$

$b>0$ であるから，b のとり得る値の範囲は



$$b\geqq {}^{\text{エ}}2a+{}^{\text{オ}}2\sqrt{a^2+{}^{\text{カ}}1}$$

(3)　グラフ G が x 軸に接するとき，① の等号が成り立つから

$$b^2-4ab-4=0$$

$a=\sqrt{3}$ のとき　　$b^2-4\sqrt{3}\,b-4=0$

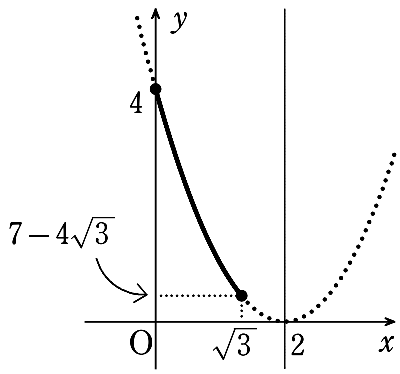
これを解いて　　$b=2\sqrt{3}\pm4$

$b>0$ であるから　$b={}^{\text{キ}}4+{}^{\text{ク}}2\sqrt{{}^{\text{ケ}}3}$

また，グラフ G と x 軸との接点の x 座標は

$\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}={}^{\text{コ}}2$ である。

このとき，$y=(x-2)^2$ であるから，グラフ G は右の図のようになる。



したがって，$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ において，y の最大値は ${}^{\text{サ}}4$ であり，y の最小値は $(\sqrt{3}-2)^2={}^{\text{シ}}7-{}^{\text{ス}}4\sqrt{{}^{\text{セ}}3}$ である。

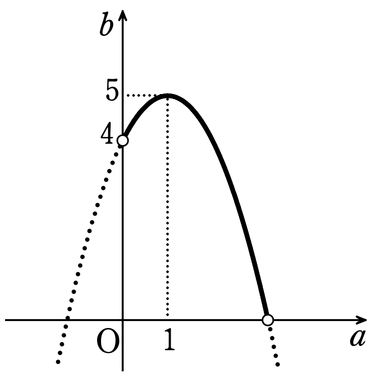
(4)　グラフ G が点 $(-1,\ 6)$ を通るから

$$6=1-2a+b+a^2+1$$

よって　　$b=-a^2+2a+4$

$$=-(a-1)^2+5$$

$a>0$，$b>0$ における，$b=-(a-1)^2+5$ のグラフは右のようになる。



したがって，b のとり得る値の最大値は ${}^{\text{ソ}}5$ であり，そのときの a の値は ${}^{\text{タ}}1$ である。

$b=5$，$a=1$ のとき，グラフ G の頂点の座標は

$$\left(\frac{5}{2}-1,\ -\frac{5^2}{4}+1\cdot5+1\right)\qquad\text{すなわち}\qquad\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$$

よって，グラフ G は 2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{{}^{\text{チ}}3}{{}^{\text{ツ}}2}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{{}^{\text{テト}}-1}{{}^{\text{ナ}}4}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　図 1 より，2013 年の開花日の最大値は 135 以上である。

よって，2013 年のヒストグラムは　　ア ③

図 1 より，2017 年の開花日の最大値は 120 以上 125 未満である。

よって，2017 年のヒストグラムは　　イ ④

(2)　⓪　図 3 より，モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。

よって，正しい。

①　図 3 より，モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。

よって，正しい。

②　図 3 より，モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。

よって，正しい。

③　図 3 より，モンシロチョウの初見日の四分位範囲はおよそ　$104-84=20$（日）

ツバメの初見日の四分位範囲はおよそ　$97-88=9$（日）

したがって，モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の 3 倍より小さい。

よって，正しい。

④　モンシロチョウの初見日の四分位範囲はおよそ 20 日であり，15 日より大きい。

よって，正しくない。

⑤　ツバメの初見日の四分位範囲はおよそ 9 日であり，15 日以下である。

よって，正しい。

⑥　図 4 において，原点を通り傾き 1 の直線 (実線) 上にある点が，モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所を表している。

重なった点を考慮すると実線上に少なくとも 4 点あるから，モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所は少なくとも 4 地点ある。

よって，正しい。

⑦　図 4 において，破線は切片が -15 および 15 で傾きが 1 の直線である。

モンシロチョウの初見日を X，ツバメの初見日を Y とおくと，2 本の破線の方程式は $Y=X+15$，$Y=X-15$ と書ける。

図 4 において，直線 $Y=X+15$ の上側の部分に点があるから，その座標を $(x,\ y)$ とおくと　$y>x+15$　すなわち　$y-x>15$

したがって，モンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差が 15 日より大きい地点

がある。

よって，正しくない。

以上から　　^{ウ}④，^{エ}⑦　(または^{ウ}⑦，^{エ}④)

(3)　X の偏差 $x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ の平均値は　0　　(^{オ}⓪)

また，各 x_i に対して $x_i'=\dfrac{1}{s}x_i-\dfrac{\overline{x}}{s}$ と書けるから，データ X' の平均値を $\overline{x'}$，標準偏差を s' とすると

$$\overline{x'}=\frac{1}{s}\overline{x}-\frac{\overline{x}}{s}=0 \qquad ({}^{カ}⓪)$$

$s>0$ であるから　　$s'=\left|\dfrac{1}{s}\right|s=1$　　　　(^{キ}①)

また，M' と T' の散布図を考える。

変換 $x_i'=\dfrac{1}{s}x_i-\dfrac{\overline{x}}{s}$ において，$\dfrac{1}{s}>0$ であるから，変換後の散布図は，変換前の散布図を縦，横に拡大，縮小および平行移動したものである。

よって，①，③ は適さない。

また，⓪ において，散布図上のすべての点は M'，T' ともに -1 から 1 の間にある。したがって，M'，T' ともに偏差の平方の平均値，すなわち分散が 1 より小さくなり，標準偏差も 1 より小さくなるから，⓪ は適さない。

以上から　　^{ク}②

参考　(偏差の平均値)

一般に，データ X の偏差 $x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ の平均値は，次の計算からわかるように常に 0 になる。

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})\}=\frac{1}{n}\{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)-n\overline{x}\}$$
$$=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)-\overline{x}=\overline{x}-\overline{x}=0$$

参考　(標準化)

一般に，各 x_i について $x_i'=\dfrac{x_i-\overline{x}}{s}$ と変換することで，変換後のデータの平均値を 0，標準偏差を 1 にすることができる。この操作を標準化という。

5

解説

(1)　1 回目の操作で，赤い袋から赤球が取り出される確率は　　$\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{{}^{ア}4}{{}^{イ}9}$

1 回目の操作で，白い袋から赤球が取り出される確率は　$\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}6}$

(2)　2 回目の操作が白い袋で行われるには，1 回目の操作で白球が取り出されればよい。

(1) より，1 回目の操作で赤球が取り出される確率は　$\frac{4}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$

よって，1 回目の操作で白球が取り出される確率は　$1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}$

したがって，2 回目の操作が白い袋で行われる確率は　$\frac{{}^{オ}7}{{}^{カキ}18}$

(3)　2 回目の操作で白球が取り出されるのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　1 回目の操作で白球を取り出し，2 回目の操作で白い袋から白球を取り出す

このとき，2 回目の操作で白球を取り出す確率は　$\frac{1}{2}p$

[2]　1 回目の操作で赤球を取り出し，2 回目の操作で赤い袋から白球を取り出す

1 回目の操作で赤球を取り出す確率は $1-p$ であるから，2 回目の操作で白球を取り出す確率は　$\frac{1}{3}(1-p)$

[1]，[2] は互いに排反であるから，2 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}(1-p)=\frac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}6}p+\frac{1}{3}$$

(2) より，$p=\frac{7}{18}$ であるから，2 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{{}^{コサ}43}{{}^{シスセ}108}$$

また，2 回目の操作で白球を取り出す確率を q で表すと，3 回目の操作で白球が取り出される確率は，同様に考えると　$\frac{1}{6}q+\frac{1}{3}$

$q=\frac{43}{108}$ であるから，3 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{43}{108}+\frac{1}{3}=\frac{{}^{ソタチ}259}{{}^{ツテト}648}$$

(4)　2 回目の操作で白球を取り出す事象を A，2 回目の操作で白い袋から球を取り出す事象を B とすると，求める条件付き確率は $P_A(B)$ である。

(3) から，2 回目の操作で白球を取り出す確率 $P(A)$ は　$P(A)=\frac{43}{108}$

(2) より，2 回目の操作で白い袋から白球を取り出す確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=\frac{7}{18}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{36}$$

よって，求める条件付き確率 $P_A(B)$ は　　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{7}{36}\times\dfrac{108}{43}=\dfrac{{}^{\text{ナニ}}21}{{}^{\text{ヌネ}}43}$

また，3 回目の操作で白球を取り出す事象を C，1 回目，2 回目の操作でともに赤球を取り出す事象を D とすると，求める条件付き確率は $P_C(D)$ である。

(3) から，3 回目の操作で白球を取り出す確率 $P(C)$ は　　$P(C)=\dfrac{259}{648}$

(2) より，1 回目，2 回目の操作でともに赤球を取り出し，3 回目の操作ではじめて白球を取り出す確率 $P(C\cap D)$ は　　$P(C\cap D)=\dfrac{11}{18}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{22}{162}$

よって，求める条件付き確率 $P_C(D)$ は

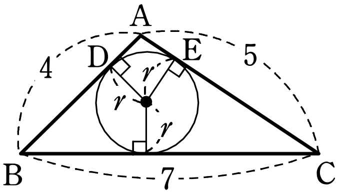
$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{22}{162}\times\frac{648}{259}=\frac{{}^{\text{ノハ}}88}{{}^{\text{ヒフヘ}}259}$$

$\boxed{6}$

（解説）

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$=4\sqrt{6}$$



よって，△ABC の内接円の半径を r とおくと

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})$$

ゆえに　　$r=\dfrac{2S}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC}}=\dfrac{2\cdot4\sqrt{6}}{4+7+5}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ア}}6}}{{}^{\text{イ}}2}$

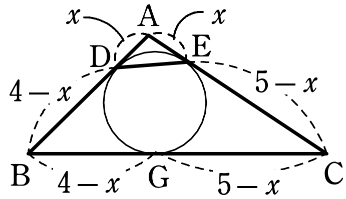
△ABC の内接円と辺 BC との接点を G とすると，3 辺 AB，AC，BC はそれぞれ点 D，E，G で △ABC の内接円に接しているから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AE},\ \mathrm{BD}=\mathrm{BG},\ \mathrm{CE}=\mathrm{CG}$$

AD $=x$ とおくと，AE $=x$，BD $=4-x$，CE $=5-x$ であるから　　BG $=4-x$，CG $=5-x$

BG + CG = BC であるから　　$(4-x)+(5-x)=7$

よって　　$x=1$　　　　ゆえに　　AD $={}^{\text{ウ}}1$



△ADE において，余弦定理により

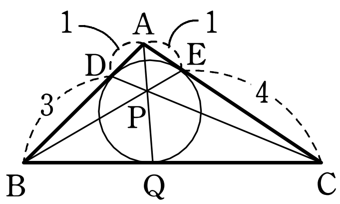
$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{DAE}=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{5}$$

したがって　　$\mathrm{DE}=\sqrt{\dfrac{12}{5}}=\dfrac{{}^{\text{エ}}2\sqrt{{}^{\text{オカ}}15}}{{}^{\text{キ}}5}$

右の図の△ABCにチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{4}{1}=1$　　　よって　$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{{}^{\text{ク}}3}{{}^{\text{ケ}}4}$

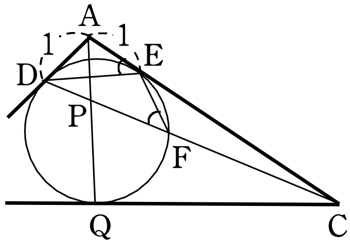


BC＝7であるから，BQ＝${}^{\text{コ}}3$，CQ＝4で，2点G，Qは一致する。

ゆえに，点Qは△ABCの内接円と辺BCとの接点であるから　　$\mathrm{IQ}=r=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{サ}}6}}{{}^{\text{シ}}2}$

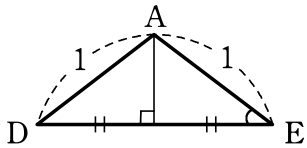
△ABCの内接円と辺ACに対して，接線と弦の作る角の性質より　　∠DFE＝∠DEA

△ADEはAD＝AE＝1の二等辺三角形であるから



$$\cos\angle\mathrm{DEA}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{5}$$



よって　　$\cos\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{スセ}}15}}{{}^{\text{ソ}}5}$