$\boxed{1}$

解説

(1)　$f(0)=3\cdot 0^2+4\cdot 0\cdot 1-1^2={}^{アイ}-1$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}={}^{ウ}2+\sqrt{{}^{エ}3}$$

(2)　2倍角の公式により

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta,\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+{}^{オ}1}{{}^{カ}2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

ゆえに　$f(\theta)=3\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+4\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$

$={}^{キ}2\sin 2\theta-{}^{ク}2\cos 2\theta+{}^{ケ}1$　……①

(3)　三角関数の合成を用いると，①は

$$f(\theta)={}^{コ}2\sqrt{{}^{サ}2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{{}^{シ}4}\right)+1$$

と変形できる。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-2\sqrt{2}+1\leqq f(\theta)\leqq 2\sqrt{2}+1$

ここで　$2\sqrt{2}+1=\sqrt{8}+1$

$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$ より $2<\sqrt{8}<3$ であるから　$3<\sqrt{8}+1<4$

したがって，$f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m は　$m={}^{ス}3$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$f(\theta)=3$ とすると

$$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=3$$

すなわち　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，π　　よって　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{セ}4}$，$\dfrac{\pi}{{}^{ソ}2}$

$\boxed{2}$

(解説)

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \cdots\cdots ① \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

真数の条件により　$x+2>0$，$y+3>0$　ゆえに　$x>-2$，$y>-3$　（^{ア} ②）

底の変換公式により　$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{{}^{イ}2}$

よって，① から　$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1$

$$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+1$$

$$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+\log_2 2$$

$$\log_2(y+3)=\log_2 2(x+2)$$

したがって，$y+3=2(x+2)$ から　$y={}^{ウ}2x+{}^{エ}1$　$\cdots\cdots$ ③

③ を ② に代入すると　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$

両辺に 3 を掛けて　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}+18=0$

$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおくと　$t^2-{}^{オカ}11t+{}^{キク}18=0$　$\cdots\cdots$ ④

$x>-2$，$y>-3$ であるから　$x>-2$，$2x+1>-3$

ゆえに　$x>-2$

$0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ であるから　${}^{ケ}0<t<{}^{コ}9$　$\cdots\cdots$ ⑤

④ から　$(t-2)(t-9)=0$　⑤ より　$t={}^{サ}2$

よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2$　すなわち　$3^x=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$x=\log_3\dfrac{1}{2}$

③ から　$y=2\log_3\dfrac{1}{2}+1=\log_3\dfrac{1}{4}+\log_3 3=\log_3\left(\dfrac{1}{4}\times 3\right)=\log_3\dfrac{3}{4}$

したがって，連立方程式 ①，② を満たす実数 x，y の値は

$$x=\log_3\frac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2},\quad y=\log_3\frac{{}^{セ}3}{{}^{ソ}4}$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(x)$ が $x=-1$ で極値 2 をとるから　$f'(-1)={}^{ア}0$，$f(-1)=2$

ゆえに　$3-2p+q=0$，$-1+p-q=2$

これを解くと　$p=0$，$q=-3$

このとき　$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

よって，右の増減表が得られ，$f(x)$ は $x=-1$ で極値 2 をとり，条件を満たす。

したがって　$p={}^{イ}0$，$q={}^{ウエ}-3$

また，$f(x)$ は $x={}^{オ}1$ で極小値 ${}^{カキ}-2$ をとる。

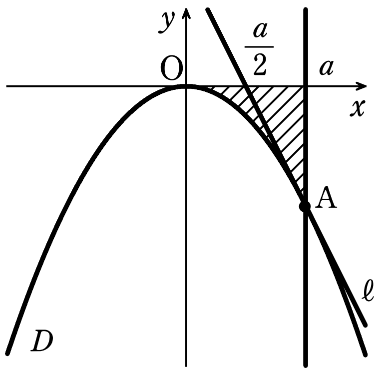
(2) $y=-kx^2$ から　$y'=-2kx$

よって，ℓ の方程式は　$y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$

すなわち　$y={}^{クケ}-2kax+ka^{{}^{コ}2}$　……①

① において $y=0$ とすると　$0=-2kax+ka^2$　すなわち　$2kax=ka^2$

$k\neq 0$，$a\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{a}{2}$



ゆえに，ℓ と x 軸の交点の x 座標は　$\dfrac{{}^{サ}a}{{}^{シ}2}$

D と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は

$$-\int_0^a(-kx^2)dx=\int_0^a kx^2dx$$

$$=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^a=\frac{k}{{}^{ス}3}a^{{}^{セ}3}$$

よって　$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot ka^2=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{k}{4}a^3=\dfrac{k}{{}^{ソタ}12}a^3$

(3) A が C 上にあるから　$-ka^2=a^3-3a$

$a\neq 0$ であるから　$k=\dfrac{{}^{チ}3}{{}^{ツ}a}-{}^{テ}a$

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は

$$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$$

すなわち　$y={}^{ト}3(b^2-{}^{ナ}1)x-{}^{ニ}2b^3$　……②

② の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}=x^3-3b^2x+2b^3$$

$$=(x-{}^{ヌ}b)^2(x+{}^{ネ}2b)$$

この式から，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ は $x=b$ で接し，$x=-2b$ で交わることがわかる。

点 A は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ 上にあるから　　$f(a)=g(a)$

すなわち　$f(a)-g(a)=0$　　　　よって　　$(a-b)^2(a+2b)=0$

① と ② の表す直線の y 切片を比較すると　　$ka^2=-2b^3$

$k>0$，$a>0$ より左辺は正であるから，$b^3<0$ であり　　$b<0$

よって，$a \fallingdotseq b$ であるから　　$a+2b=0$　　　ゆえに　$a=-2b$

① と ② の表す直線の傾きを比較すると　　$-2ka=3(b^2-1)$

k と b を消去すると　　$-2\left(\dfrac{3}{a}-a\right)a=3\left\{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2-1\right\}$

変形すると　　$-6+2a^2=\dfrac{3}{4}a^2-3$　　すなわち　　$\dfrac{5}{4}a^2=3$

よって　　$a^2=\dfrac{{}^{ノハ}12}{{}^{ヒ}5}$

したがって，求める S の値は

$$S=\frac{k}{12}a^3=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3=\frac{a^2}{4}-\frac{a^4}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{5}-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{12}{25}=\frac{{}^{フ}3}{{}^{ヘホ}25}$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) $S_2=3+3\cdot4={}^{アイ}15$

$\{T_n\}$ の階差数列が $\{S_n\}$ であるから　　$T_2-T_1=S_1$

よって　　$T_2=T_1+S_1=-1+3={}^{ウ}2$

(2) $S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}={}^{エ}4^n-{}^{カ}1$　　$({}^{オ}①)$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$T_n=T_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)$$

$$=-1+\frac{1}{3}(4^n-4)-n+1=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}$$

初項 T_1 は $T_1=-1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$T_n=\dfrac{{}^{キ}4^n}{{}^{ケ}3}-n-\dfrac{{}^{コ}4}{{}^{サ}3}$　　$({}^{ク}①)$

(3) $\{b_n\}$ の初項 b_1 は　　$b_1=\dfrac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\cdot(-1)={}^{シス}-5$

(2) より，$T_n=\dfrac{4^n}{3}-n-\dfrac{4}{3}$ であるから

$$T_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\frac{4}{3}=4\cdot\frac{4^n}{3}-n-\frac{7}{3}$$

$$=4\left(T_n+n+\frac{4}{3}\right)-n-\frac{7}{3}={}^{セ}4T_n+{}^{ソ}3n+{}^{タ}3\quad\cdots\cdots①$$

$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$ から　　$nb_n=a_n+2T_n$　$\cdots\cdots②$

② において n を $n+1$ におき換えると　　$(n+1)b_{n+1}=a_{n+1}+2T_{n+1}$　$\cdots\cdots③$

③$\times n-$②$\times4(n+1)$ から

$$n(n+1)b_{n+1}-4n(n+1)b_n=\{na_{n+1}-4(n+1)a_n\}+\{2nT_{n+1}-8(n+1)T_n\}$$

$\{a_n\}$ の漸化式より　　$n(n+1)(b_{n+1}-4b_n)=8T_n+2nT_{n+1}-8(n+1)T_n$

① より　　$n(n+1)(b_{n+1}-4b_n)=2n(4T_n+3n+3)-8nT_n$

よって　　$n(n+1)(b_{n+1}-4b_n)=6n(n+1)$

$n(n+1)\neq0$ であるから　　$b_{n+1}-4b_n=6$

したがって，$\{b_n\}$ が満たす漸化式は　　$b_{n+1}={}^{チ}4b_n+{}^{ツ}6$

これを変形して　　$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=-5+2=-3$，公比 4 の等比数列であるから

$b_n+2=-3\cdot4^{n-1}$　　　ゆえに　$b_n={}^{テト}-3\cdot4^{n-1}-{}^{ニ}2$　　$({}^{ナ}⓪)$

したがって，$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$ から

$$a_n=nb_n-2T_n=n(-3\cdot 4^{n-1}-2)-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-3n\cdot 4^{n-1}-2n-\frac{2\cdot 4\cdot 4^{n-1}}{3}+2n+\frac{8}{3}=\frac{{}^{ヌ}-({}^{ネ}9n+{}^{ノ}8)4^{n-1}+{}^{ハ}8}{{}^{ヒ}3}$$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　確率変数 X の分散について，$\{\sigma(X)\}^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ が成り立つから

$$5^2=E(X^2)-(-7)^2 \qquad \text{よって} \quad E(X^2)={}^{アイ}74$$

$W=1000X$ とすると

$$E(W)=E(1000X)=1000E(X)=1000\cdot(-7)=-7\times10^{{}^{ウ}3}$$

$$V(W)=V(1000X)=1000^2V(X)=1000^2\cdot\{\sigma(X)\}^2=1000^2\cdot5^2=5^{{}^{エ}2}\cdot10^{{}^{オ}6}$$

(2)　$X\geqq0$ から　$\dfrac{X+7}{5}\geqq\dfrac{0+7}{5}=1.4$

よって　$P(X\geqq0)=P\left(\dfrac{X+7}{5}\geqq{}^{カ}1.{}^{キ}4\right)$

ここで，X が正規分布 $N(-7,\ 5^2)$ に従うから，確率変数 $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\dfrac{X+7}{5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$Z=\dfrac{X+7}{5}$ とすると，正規分布表より

$$P(Z\geqq1.4)=0.5-P(0\leqq Z\leqq1.4)=0.5-0.4192=0.0808$$

小数第 3 位を四捨五入して　$P(Z\geqq1.4)=0.{}^{クケ}08$

これが，物質 A の量が減少しない確率 $P(X\geqq0)$ である。

よって，確率変数 M は二項分布 $B(50,\ 0.08)$ に従うから

$$E(M)=50\cdot0.08={}^{コ}4.{}^{サ}0$$

$$\sigma(M)=\sqrt{50\cdot0.08\cdot(1-0.08)}=\sqrt{4.0\cdot0.92}=\sqrt{3.68}$$

根号内の小数第 2 位を四捨五入して　$\sigma(M)=\sqrt{{}^{シ}3.{}^{ス}7}$

(3)　標本平均 $\overline{Y}$ の標準偏差は　$\sigma(\overline{Y})=\dfrac{6}{\sqrt{100}}={}^{セ}0.{}^{ソ}6$

よって，確率変数 $Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，正規分布表より　$P(|Z|\leqq1.64)=2P(0\leqq Z\leqq1.64)=2\cdot0.4495=0.899$

小数第 3 位を四捨五入して　$P(|Z|\leqq1.64)=0.{}^{タチ}90$

ここで，$|Z|\leqq1.64$ から　$\left|\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}\right|\leqq1.64$　すなわち　$|\overline{Y}-m|\leqq0.984$

よって　$-0.984\leqq\overline{Y}-m\leqq0.984$　ゆえに　$\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984$

したがって　$P(\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984)=0.90$

これは，母平均 m に対する信頼度 90 % の信頼区間が $\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984$ であることを表している。

$\overline{Y}=-10.2$ を代入して　$-11.184\leqq m\leqq-9.216$

小数第 2 位をそれぞれ四捨五入して　　$-11.2 \leqq m \leqq -9.2$　　（ツ ②）