1

(解説)

(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}x+\cos\dfrac{2}{3}x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}x\right)={}^{ア}2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{{}^{イ}6}\right)$

よって　$f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left\{2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^2={}^{ウ}2\sin^2\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

2倍角の公式 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より，$2\sin^2\theta=-\cos 2\theta+1$ であるから

$$f(x)=-\cos 2\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1=-\cos\left(\frac{{}^{エ}4}{{}^{オ}3}x+\frac{\pi}{{}^{カ}3}\right)+{}^{キ}1$$

(2)　一般に，$-\cos\theta=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$ がすべての θ に対して成り立つ。(^{ク} ⓵)

よって　$f(x)=\sin\left\{\left(\dfrac{4}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right\}+1=\sin\left(\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{{}^{ケ}6}\right)+1$

(3)　(2) から　$f(x)=\sin\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)+1$

よって，関数 $y=f(x)$ のグラフは，$y=\sin\left(\dfrac{4}{3}x\right)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{{}^{コ}8}$，y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは　$2\pi\div\dfrac{4}{3}=\dfrac{{}^{サ}3}{{}^{シ}2}\pi$

(4)　$f(x)=1$ とすると　$\sin\left(\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=1$

よって　$\sin\left(\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$　……①

$0\leqq x\leqq 2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{4}{3}\cdot 2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{2}\pi$

この範囲で①を満たすのは　$\dfrac{4}{3}x-\dfrac{\pi}{6}=0,\ \pi,\ 2\pi$

よって，$f(x)=1$ を満たす x は ${}^{ス}3$ 個ある。

その中で最小のものを α とおくと，$\dfrac{4}{3}\alpha-\dfrac{\pi}{6}=0$ から　$\alpha=\dfrac{\pi}{{}^{セ}8}$

2倍角の公式から　$\tan 2\alpha=\dfrac{{}^{ソ}2\tan\alpha}{{}^{タ}1-\tan^2\alpha}$

ここで，$\tan 2\alpha = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ であるから　　$1 = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

分母を払って整理すると　　$\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 = 0$

よって　　$\tan\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$

$\tan\alpha > 0$ であるから　　$\tan\alpha = \sqrt{^{チ}2} - {}^{ツ}1$

$\boxed{2}$

(解説)

確率変数 X の期待値は

$$E(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{^{ア}7}{_{イ}2}$$

$Y=1$ となるのは，最初に 1 の目が出て，もう一度投げたときも 1 の目が出る場合であるから　$P(Y=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{^{ウ}1}{_{エオ}36}$

$Y=2$ となるのは，

[1]　最初に 2 の目が出る。

[2]　最初に 1 の目が出て，もう一度投げたとき 2 の目が出る。

の 2 つの場合があるから

$$P(Y=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{^{カ}7}{_{キク}36}$$

同様に　$P(Y=3)=P(Y=4)=P(Y=5)=P(Y=6)=\frac{7}{36}$

よって，確率変数 Y の期待値は

$$E(Y)=1\cdot\frac{1}{36}+(2+3+4+5+6)\cdot\frac{7}{36}=\frac{141}{36}=\frac{^{ケコ}47}{_{サシ}12}$$

さらに，期待値を大きくするには，最初のさいころの目が $\frac{7}{2}$ より大きいときはそのまま得点にし，$\frac{7}{2}$ より小さいときにはもう一度投げるのがよい。

このとき，最初に 1，2，3 の目が出たとき，もう一度投げることになるが，2 回目に 1 ～ 6 の目が出る確率は，それぞれ　$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}$

よって，確率変数 Z の期待値は

$$E(Z)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+(4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{^{スセ}17}{_{ソ}4}$$

$\boxed{3}$

(解説)

科目 A の点数を X とすると，X は正規分布 $N(66.2,\ 15.0^2)$ に従う。

よって，$Z=\dfrac{X-66.2}{15.0}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=80$ のとき　　$Z=\dfrac{80-66.2}{15.0}=0.92$

ゆえに　　$P(X\geqq 80)=P(Z\geqq 0.92)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 0.92)$

$=0.5-0.3212=0.1788$

$14000\times 0.1788=2503.2$ であるから，80 点であった生徒の順位は 2001 から 3000 までにある。(ア ②)

$X=59$ のとき　　$Z=\dfrac{59-66.2}{15.0}=-0.48$

ゆえに　　$P(X\geqq 59)=P(Z\geqq -0.48)=0.5+P(-0.48\leqq Z\leqq 0)$

$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 0.48)$

$=0.5+0.1844=0.6844$

$14000\times 0.6844=9581.6$ であるから，59 点であった生徒の順位は 9001 から 10000 までにある。(イ ⑨)

次に，科目 B の点数について，母標準偏差は 16.0，標本の大きさは 196，標本平均は 63.5 であるから，母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$63.5-1.96\cdot\frac{16}{\sqrt{196}}\leqq m\leqq 63.5+1.96\cdot\frac{16}{\sqrt{196}}$$

すなわち　　$63.5-2.24\leqq m\leqq 63.5+2.24$

よって　　$61.26\leqq m\leqq 65.74$

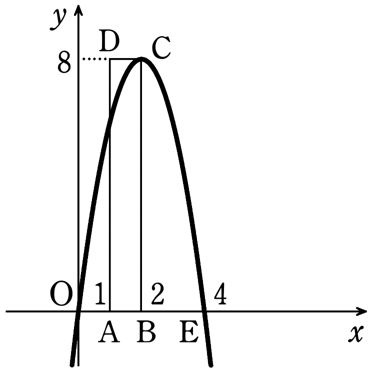
小数第 2 位を四捨五入すると　　ウエ61.オ3 $\leqq m\leqq$ カキ65.ク7

$\boxed{4}$

(解説)

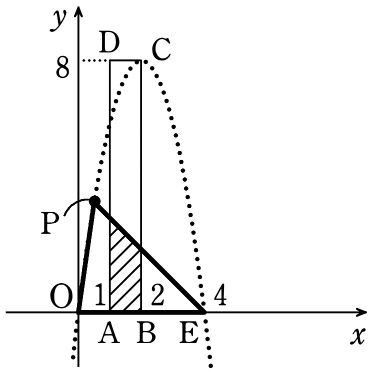
(1)　$8x-2x^2=-2(x-2)^2+8$

よって，曲線 $y=8x-2x^2$ と長方形 ABCD の概形を図示すると右のようになる．



[1]　$0<t\leqq 1$ のとき

共通部分は，右図の斜線部分．



直線 EP の方程式は　$y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)$

すなわち　$y=-2tx+8t$ ……①

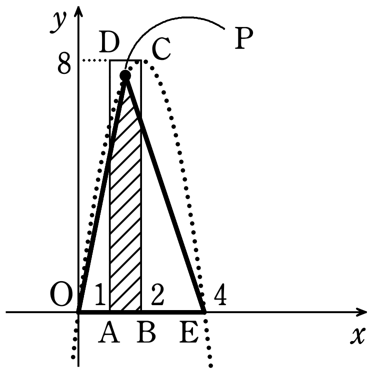
①で　$x=1$ のとき　$y=6t$

　　　$x=2$ のとき　$y=4t$

よって　$f(t)=\dfrac{1}{2}(6t+4t)\cdot 1=5t$

[2]　$1<t\leqq 2$ のとき

共通部分は，右図の斜線部分．



直線 OP の方程式は　$y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x$

すなわち　$y=(-2t+8)x$ ……②

②で　$x=1$ のとき　$y=-2t+8$

　　　$x=t$ のとき　$y=-2t^2+8t$

①で　$x=2$ のとき　$y=4t$

よって

$$f(t)=\frac{1}{2}\{-2t+8+(-2t^2+8t)\}(t-1)+\frac{1}{2}\{(-2t^2+8t)+4t\}(2-t)$$

$$=-4t^2+13t-4$$

[3]　$2<t<4$ のとき

共通部分は，右図の斜線部分.

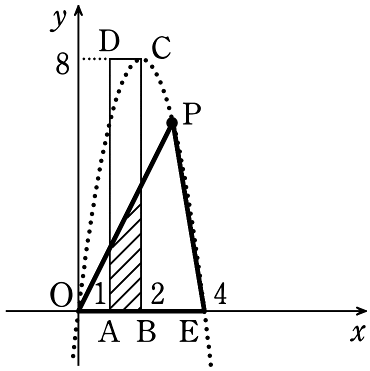
②で　$x=1$ のとき　$y=-2t+8$

$x=2$ のとき　$y=-4t+16$

よって

$$f(t)=\frac{1}{2}\{(-2t+8)+(-4t+16)\}\cdot 1$$

$$=-3t+12$$



(2)　(1) から

$$f(t)=\begin{cases} 5t & (0<t\leqq 1) \\ -4\left(t-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16} & (1<t\leqq 2) \\ -3t+12 & (2<t<4) \end{cases}$$

$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる.

よって，$f(t)$ は $t=\frac{13}{8}$ のとき最大値 $\frac{105}{16}$ をとる.