中３甲陽PLUS数学　6月17日(水)　　再テスト　　氏名[　　　　　　　　　　]　　　　点

1

点 $(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$3x+4y=25$，接点 $(3,\ 4)$；$x=-5$　接点 $(-5,\ 0)$

解説

(方法 1)　接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，接線の方程式は　$x_0x+y_0y=25$

これが点 $(-5,\ 10)$ を通るとき　$-5x_0+10y_0=25$

すなわち　$-x_0+2y_0=5$　……①

また，点 $(x_0,\ y_0)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　${x_0}^2+{y_0}^2=25$　……②

①，② から x_0 を消去して整理すると　${y_0}^2-4y_0=0$

よって　$y_0(y_0-4)=0$　　ゆえに　$y_0=4,\ 0$

① から　$y_0=4$ のとき $x_0=3$，　$y_0=0$ のとき $x_0=-5$

したがって，求める直線の方程式と接点の座標は次のようになる。

接線の方程式　$3x+4y=25$，接点の座標　$(3,\ 4)$

接線の方程式　$x=-5$，　　接点の座標　$(-5,\ 0)$

(方法 2)　点 $(-5,\ 10)$ を通る直線の方程式は，k を定数として

$x=-5$　……①　または　$y=k(x+5)+10$　……②

円 $x^2+y^2=25$ の中心 $(0,\ 0)$ から直線 ① までの距離は 5 で，円の半径に等しいから，直線 ① は円 $x^2+y^2=25$ の接線である。

また，接点の座標は　$(-5,\ 0)$

② から　　$kx-y+5k+10=0$

円 $x^2+y^2=25$ と直線 ② が接するとき，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離が円の半径 5 に等しいから

$$\frac{|k\cdot 0-0+5k+10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5\qquad \text{すなわち}\qquad 5|k+2|=5\sqrt{k^2+1}$$

よって　　$|k+2|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗して整理すると　　$4k+3=0$　　ゆえに　　$k=-\dfrac{3}{4}$

このとき，② は　　$y=-\dfrac{3}{4}(x+5)+10$　　すなわち　　$3x+4y=25$　……③

ここで，接点を P とすると，直線 OP の方程式は　$y=\dfrac{4}{3}x$　……④

③，④ の連立方程式を解いて　$x=3$，$y=4$

よって，接点の座標は　$(3,\ 4)$

したがって，求める直線の方程式と接点の座標は次のようになる。

接線の方程式　$3x+4y=25$，接点の座標　$(3,\ 4)$

接線の方程式　$x=-5$，　　接点の座標　$(-5,\ 0)$

2

円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の 2 つの交点と点 $(-1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$

解説

k を定数として，方程式 $k(x^2+y^2+2x+4y-4)+7x-y+2=0$　……①

を考えると，① の表す曲線は円と直線の 2 つの交点を通る。

曲線 ① が点 $(-1,\ 2)$ を通るとき

$k\{(-1)^2+2^2+2\cdot(-1)+4\cdot 2-4\}+7\cdot(-1)-2+2=0$　　よって　$k=1$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$

これが求める円の方程式である。

3

点 Q が円 $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，2 点 A $(4,\ 0)$，B $(2,\ 0)$ と Q を頂点とする △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

解答　中心が点 $(2,\ 0)$，半径が 1 の円　ただし，2 点 $(3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を除く

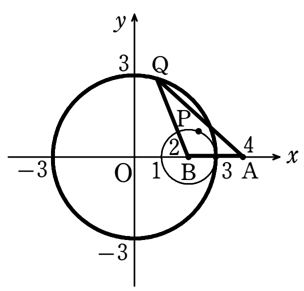
解説

円 $x^2+y^2=9$ 上の動点 Q の座標を $(s,\ t)$ とすると

$s^2+t^2=9$　……①

点 P は △ABQ の重心であるから，その座標を $(x,\ y)$

とすると　　$x=\dfrac{4+2+s}{3}$，$y=\dfrac{0+0+t}{3}$



ゆえに　　$s=3x-6$，$t=3y$

これを ① に代入すると　　$(3x-6)^2+(3y)^2=9$

よって　　$(x-2)^2+y^2=1$

ただし，点 Q が直線 AB 上にあるとき，図形 ABQ は三角形にならない。

したがって，点 P の軌跡は　　中心が $(2,\ 0)$，半径が 1 の円　ただし，2 点 $(3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ は除く。

4

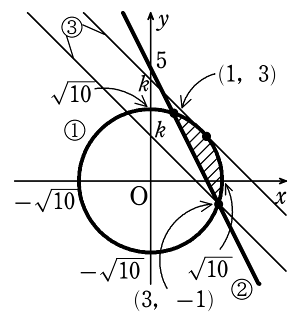
x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ で最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ で最小値 2

解説

円 $x^2+y^2=10$ ……①，直線 $y=-2x+5$ ……② の交点の座標は　　$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ -1)$

よって，与えられた連立不等式の表す領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$x+y=k$ ……③ とおくと，③ は傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大となる。

①，③ から y を消去して　　$x^2+(k-x)^2=10$

すなわち　$2x^2-2kx+k^2-10=0$　……④

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-10)=-k^2+20$

直線 ③ が円 ① と接するとき，$D=0$ であるから　　$-k^2+20=0$

よって　　$k=\pm 2\sqrt{5}$　　接点が領域上にあるとき　　$k=2\sqrt{5}$

このとき，④ から　　$x=\dfrac{k}{2}=\sqrt{5}$　　③ から　　$y=\sqrt{5}$

また，直線 ③ が点 $(3,\ -1)$ を通るとき，k は最小値 $3+(-1)=2$ をとる。

よって　　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ で最大値 $2\sqrt{5}$ ；　$x=3$，$y=-1$ で最小値 2

中３甲陽PLUS数学　6月17日(水)　　再テスト　　氏名[　　　　　　　　　　]　　　　点

$\boxed{1}$

点 $(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

$\boxed{2}$

円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の２つの交点と点 $(-1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$

点Ｑが円 $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，２点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$ とＱを頂点とする $\triangle\mathrm{ABQ}$ の重心Ｐの軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

x，y が２つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。