1

連立方程式 $\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を考える。

ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，① から $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ が得られる。

また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

したがって，条件 ③ を用いると $\cos^2\alpha = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。よって，

② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}},\quad \cos\beta = \frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$$

である。

2

座標平面上に点 A$\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$をとり，関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上に2点 B$(p,\ \log_2 p)$，C$(q,\ \log_2 q)$ をとる。線分 AB を 1：2 に内分する点がCであるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p>\boxed{\text{ア}}$，$q>\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は，p を用いて

$\left(\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}p,\ \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\log_2 p+\boxed{\text{カ}}\right)$ と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}p=q & \cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\log_2 p+\boxed{\text{カ}}=\log_2 q & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$ が成り立つ。

⑤は $p=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}q^{\boxed{\text{ケ}}}$ ……⑥と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，

$p>\boxed{\text{ア}}$，$q>\boxed{\text{ア}}$ に注意すると $p=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$q=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\right)$ の値を，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると，$\boxed{\text{セ}}$ である。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから1つ選べ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

⓪ 0.3	① 0.6	② 0.9	③ 1.3	④ 1.6	⑤ 1.9
⑥ 2.3	⑦ 2.6	⑧ 2.9	⑨ 3.3	ⓐ 3.6	ⓑ 3.9

$\boxed{3}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　1回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均(期待値) m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n=\boxed{\text{アイウ}}$，$p=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(2)　(1)の反復試行において，W が38以上となる確率の近似値を求めよう。

いま　$P(W \geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$ と変形できる。ここで，

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)=0.\boxed{\text{コサ}}$$

(3)　連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)dx$$

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a\ \text{のとき}) \end{cases}$$

であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は

$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{4}$

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$0 < m \leqq n$ となる整数 m，n があり $2\vec{a}\cdot\vec{b} = m\vec{a}\cdot\vec{a} = n\vec{b}\cdot\vec{b}$ が成り立つとする．このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 $\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ の値と，そのときの $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ の値をすべて求めよ．