添削課題NO 1　　　　　名前〔　　　　　〕

1

関数 $f(x)=x-e\log x$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$f(x)$ を微分せよ。

(2)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4)　(2) の結果を用いて，e^{π} と π^{e} の大小を比較せよ。ただし，π は円周率である。

解答　(1)　$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$　(2)　$x=0$ で極小値 0　(3)　$\dfrac{e^2}{2}-e-\dfrac{1}{2}$　(4)　$e^{\pi}>\pi^{e}$

解説

(1)　$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$

(2)　真数条件より　$x>0$

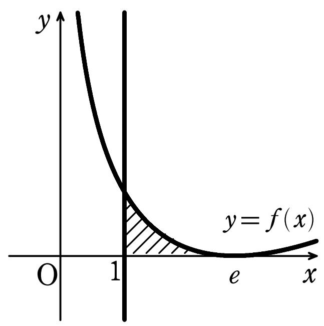
$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

(3)　S は右の図の斜線部分の面積である。



よって　$\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-e(x\log x-x)\right]_1^e$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}$$

(4)　$\log e^{\pi}$ と $\log \pi^{e}$ の大小を考える。

$$\log e^{\pi}-\log \pi^{e}=\pi-e\log\pi=f(\pi)$$

(2) より，$x>e$ において $f(x)>0$ であるから

$f(\pi)>0$　すなわち　$\log e^{\pi}>\log \pi^{e}$

ゆえに　$e^{\pi}>\pi^{e}$

$\boxed{2}$ ［中央大］

(1)　$x>-1$ において，不等式 $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n に対し $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$ と定める。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\sqrt{e}$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(1+x)$ とおく。

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x>-1$ のとき，$f(x)\geqq 0$ すなわち $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つ。

(2)　$g(x)=\log(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$$

よって，$x\geqq 0$ のとき，$g'(x)\geqq 0$ より，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

このことと，$g(0)=0$ より，$x\geqq 0$ のとき $g(x)\geqq 0$ すなわち $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つ。

(3)　すべての自然数 n に対し $a_n>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log a_n=\log\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

ここで，(1) と (2) より，$x\geqq 0$ のとき

$$x-\frac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x$$

が成り立つから，$x=\dfrac{k}{n^2}$ (>0) とおくと　　$\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\leqq\log\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\leqq\dfrac{k}{n^2}$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\leqq\log a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$

ここで　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2n^4}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

また　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{2}$　　したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{e}$

添削課題NO 1 名前〔 〕

$\boxed{1}$

関数 $f(x)=x-e\log x$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4) (2) の結果を用いて，e^{π} と π^{e} の大小を比較せよ。ただし，π は円周率である。

$\boxed{2}$［中央大］

(1)　$x > -1$ において，不等式 $\log(1+x) \leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \log(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n に対し $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$ と定める。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。