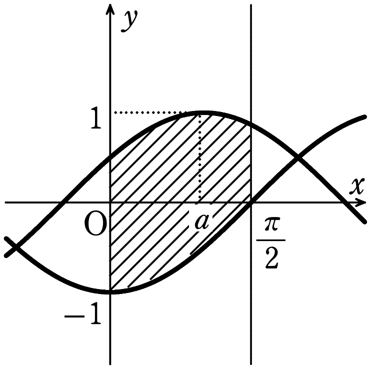
$\boxed{1}$

(解説)

(1)　2 曲線の概形は右の図のようになる。




よって　　$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(x-a)-(-\cos x)\}dx$

$$=\Big[\sin(x-a)+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+1-\sin(-a)$$

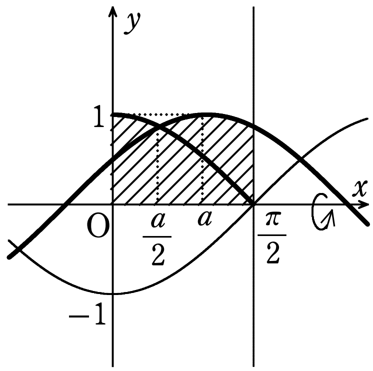
$$=\sin a+\cos a+1$$

(2)　(1) より　　$S=\sin a+\cos a+1=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)+1$

$0\leqq a<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\frac{\pi}{4}\leqq a+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$

したがって，$S$ は $a+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $a=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる。

(3)　曲線 $y=-\cos x$　$\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を $x$ 軸に関して折り返すと，右の図のようになる。




曲線 $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=\cos(x-a)$ は

$x=\frac{a}{2}$ で交わる。

したがって　$V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x-a)\,dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x-2a)}{2}dx$$

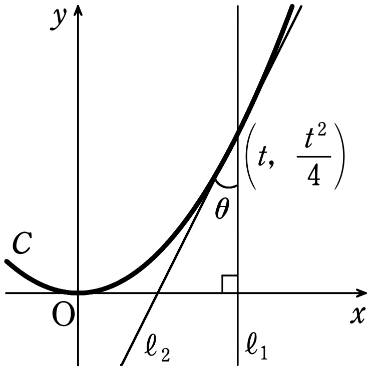
$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{a}{2}}+\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x-2a)\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\sin a+\sin 2a+\pi)$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ から　　$y'=\dfrac{x}{2}$




よって，直線 $\ell_2$ の傾きは $\dfrac{t}{2}$ であり，$\ell_2$ と $x$ 軸の正の向きとのなす角を $\alpha$ とすると

$$\tan\alpha=\frac{t}{2}$$

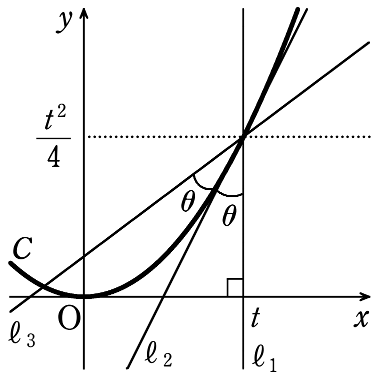
$\tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ であるから，$t>0$ より

$$\tan\theta=\frac{2}{t}$$

ゆえに　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{t}\right)^2}=\dfrac{t^2}{t^2+4}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\geqq0$ であるから　　　$\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$

(2)　$\ell_3$ は，$\ell_1$ を $\ell_2$ に関して対称移動させた直線であるから，$\ell_3$ と $\ell_2$ のなす角は $\theta$ である。




[1]　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき　　$\ell_3$ の傾きは　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

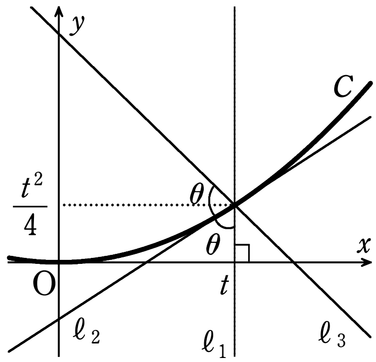
[2]　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\ell_3$ の傾きは　$\tan\left\{\pi-\left(2\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

[1]，[2] から，$\ell_3$ の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{1}{\tan2\theta}$$

$$=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{1-\left(\dfrac{2}{t}\right)^2}{2\cdot\dfrac{2}{t}}=\frac{t^2-4}{4t}$$




よって，直線 $\ell_3$ の方程式は

$$y=\frac{t^2-4}{4t}(x-t)+\frac{t^2}{4}$$

すなわち　　$y=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1$

(3)　(2) で求めた方程式により，$\ell_3$ は $t$ によらない $y$ 軸上の定点 $(0,\ 1)$ を通る。

(4)　$\ell_3$ と $C$ の 2 つの共有点の $x$ 座標は，$\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1$ の実数解である。

整理すると　　$tx^2+(4-t^2)x-4t=0$

すなわち　　$(x-t)(tx+4)=0$　　　　よって　　$x=t,\ -\dfrac{4}{t}$

$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{4}{t},\ \dfrac{4}{t^2}\right)$ としてよいから

$$\mathrm{PQ}^2=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t^2}\right)^2=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\frac{1}{16}\left(t^2+\frac{16}{t^2}\right)^2-4$$

$$=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\frac{1}{16}\left\{\left(t+\frac{4}{t}\right)^2-8\right\}^2-4$$

$$=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\frac{1}{16}\left(t+\frac{4}{t}\right)^4-\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+4-4=\frac{1}{16}\left(t+\frac{4}{t}\right)^4$$

$t>0$，$\dfrac{4}{t}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$\left(t+\frac{4}{t}\right)^2\geqq\left(2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}\right)^2=16$$

等号が成り立つのは $t=2$ のときである。

よって，線分 PQ の長さは $t=2$ のとき最小になる。

$\boxed{3}$

(解説)

$n$ 回の試行を終えたとき，番号 $n$ のカード $\boxed{n}$ が山の一番上にきているのは，次の[1], [2]のどちらかの場合である。

[1]　1 回目から $n-1$ 回目までは $\boxed{n}$ より下にカードを入れ，$n$ 回目は $\boxed{n}$ をそのまま一番上にもどす。

[2]　$n$ 回の試行のうち，$n-1$ 回は $\boxed{n}$ より下にカードを入れ，$k$回目 ($k=1$，2，……，$n-1$) だけは $\boxed{n}$ より上にカードを入れる。

[1]の場合の確率 $P_1$ は　　$P_1=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$

[2]の場合の確率 $P_2$ は，各 $k$ に対する確率が

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{k-1}{n}\times\frac{n-k}{n}\times\frac{k}{n}\cdot\frac{k+1}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}(n-k)$$

であるから　　$P_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{n^n}(n-k)=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{n(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$

$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

よって，求める確率は

$$P_1+P_2=\frac{(n-1)!}{n^n}+\frac{(n-1)!}{n^n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)!}{2n^n}(n^2-n+2)$$