$\boxed{1}$

四角形 ABCD は円に内接し，$\angle$ABC は鈍角で，AB$=2$，BC$=\sqrt{6}$，

$\sin\angle\text{ABC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする。また，線分 AC と BD は直角に交わるとする。

このとき $\cos\angle\text{ABC}=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，AC$=\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ となる。円の半径は

$\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ であり $\sin\angle\text{CAB}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$，$\sin\angle\text{ACB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ となる。

また，三角形 ABC の面積は $\sqrt{\boxed{ス}}$ である。さらに，AC と BD の交点を H とおく

と CH$=\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$，BD$=\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$ であり，四角形 ABCD の面積は

$\boxed{トナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$ である。

1

解答　$\dfrac{(\text{ア})\sqrt{(\text{イ})}}{(\text{ウ})}$　$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$　　$(\text{エ})\sqrt{(\text{オ})}$　$3\sqrt{2}$　　$\dfrac{(\text{カ})\sqrt{(\text{キ})}}{(\text{ク})}$　$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　　$\dfrac{(\text{ケ})}{(\text{コ})}$　$\dfrac{1}{3}$

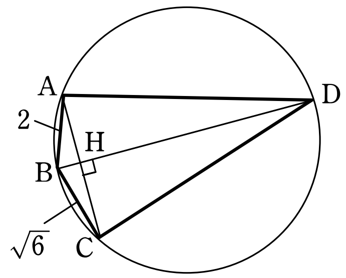
$\dfrac{\sqrt{(\text{サ})}}{(\text{シ})}$　$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　　$\sqrt{(\text{ス})}$　$\sqrt{2}$　　$\dfrac{(\text{セ})\sqrt{(\text{ソ})}}{(\text{タ})}$　$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$　　$\dfrac{(\text{チツ})}{(\text{テ})}$　$\dfrac{22}{3}$

$(\text{トナ})\sqrt{(\text{ニ})}$　$11\sqrt{2}$

配点　アイウ，エオ，カキク，ケコ，サシ，ス，セソタ：各1点，チツテ：2点
トナニ：1点

1

解説



$\cos\angle\mathrm{ABC}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{{}^{\text{ア}}-\sqrt{{}^{\text{イ}}6}}{{}^{\text{ウ}}3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=2^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=18$$

ゆえに　$\mathrm{AC}={}^{\text{エ}}3\sqrt{{}^{\text{オ}}2}$

円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{{}^{\text{カ}}3\sqrt{{}^{\text{キ}}6}}{{}^{\text{ク}}2}$

同様に $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\angle\mathrm{CAB}}=3\sqrt{6}$ から

$\sin\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}3}$, $\dfrac{2}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=3\sqrt{6}$ から　$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{サ}}6}}{{}^{\text{シ}}9}$

また，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{{}^{\text{ス}}2}$ で

あり，$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ACB}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\dfrac{{}^{\text{セ}}5\sqrt{{}^{\text{ソ}}2}}{{}^{\text{タ}}3}$, $\mathrm{BD}=\mathrm{BH}+\mathrm{HD}$

ここで　$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{2}{3}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{HD}&=\mathrm{CH}\tan\angle\mathrm{ACD}=\mathrm{CH}\tan(90^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\mathrm{CH}\tan(90^\circ-\angle\mathrm{CAB})\\&=\frac{\mathrm{CH}}{\tan\angle\mathrm{CAB}}\end{aligned}$$

$\cos^2\angle\mathrm{CAB}=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$ より $\tan^2\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{1}{\cos^2\angle\mathrm{CAB}}-1=\dfrac{1}{8}$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{CAB}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ゆえに　$\mathrm{HD}=\dfrac{\mathrm{CH}}{\tan\angle\mathrm{CAB}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\cdot2\sqrt{2}=\dfrac{20}{3}$

したがって，$\mathrm{BD}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{{}^{\text{チツ}}22}{{}^{\text{テ}}3}$ であり，四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{22}{3}={}^{\text{トナ}}11\sqrt{{}^{\text{ニ}}2}$$