5月6日(水)　高２理系数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　】　　　　　　　　点/10点

1

(1) 曲線 $C_1：6y-x^2=k$ と曲線 $C_2：y=\log(x+2)$ が共有点をもち，この点で２つの曲線の接線が一致するとき，定数 k の値を求めよ。

(2) (1)のとき，曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1) $k=6\log3-1$　　(2) $S=\frac{8}{9}+2\log\frac{2}{3}$

解説

(1) 真数は正であるから　$x>-2$

$6y-x^2=k$ から　$y=\frac{x^2}{6}+\frac{k}{6}$

ゆえに　$y'=\frac{1}{3}x$

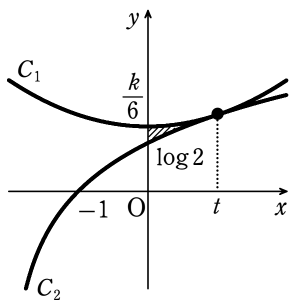
$y=\log(x+2)$ から　$y'=\frac{1}{x+2}$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標を t とすると，この点における C_1，C_2 の接線が一致するから

$\frac{t^2}{6}+\frac{k}{6}=\log(t+2)$ ……①，　$\frac{1}{3}t=\frac{1}{t+2}$ ……②

②から　$t^2+2t-3=0$　　$t>-2$ であるから　$t=1$

①に代入して解くと　$k=6\log3-1$



(2) $S=\int_0^1\left\{\left(\frac{x^2}{6}+\log3-\frac{1}{6}\right)-\log(x+2)\right\}dx$

$=\left[\frac{1}{18}x^3+\left(\log3-\frac{1}{6}\right)x-(x+2)\log(x+2)+x\right]_0^1$

$=\frac{1}{18}+\log3-\frac{1}{6}-3\log3+1+2\log2$

$=\frac{8}{9}+2\log\frac{2}{3}$

2

a を正の実数とする。関数 $f(x)=e^{a(x+1)}-ax$ とする。

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 原点から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(3) この曲線と y 軸，および(2)で求めた接線によって囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $S(a)$ の最小値を求めよ。

解答　(1) $1+a$　　(2) $y=a(e^{a+1}-1)x$　　(3) $S(a)=\left(\frac{e}{2}-1\right)\frac{e^a}{a}$　　(4) $\frac{e^2}{2}-e$

解説

(1) $f'(x)=ae^{a(x+1)}-a=a\{e^{a(x+1)}-1\}$

$f'(x)=0$ から　$x=-1$

よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

したがって，$f(x)$ は $x=-1$ のとき極小かつ最小で，求める最小値は　$f(-1)=1+a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

(2) 接点の x 座標を t とおく。

このとき，接線の方程式は　$y-\{e^{a(t+1)}-at\}=a\{e^{a(t+1)}-1\}(x-t)$

よって　$y=a\{e^{a(t+1)}-1\}x+(1-at)e^{a(t+1)}$

これが原点を通るとき　$0=0+(1-at)e^{a(t+1)}$

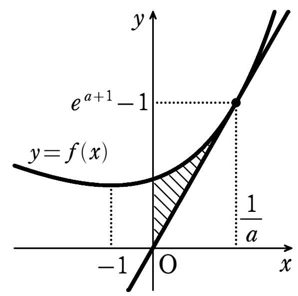
$e^{a(t+1)}>0$ であるから　$1-at=0$　　$a>0$ であるから　$t=\frac{1}{a}$

よって，求める接線の方程式は　$y=a(e^{a+1}-1)x$

(3) (2)より接点の座標は $\left(\frac{1}{a},\ e^{a+1}-1\right)$ であるから，

求める面積 $S(a)$ は右の図の斜線部分の面積である。

よって



$S(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}\{e^{a(x+1)}-ax\}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot(e^{a+1}-1)$

$=\left[\frac{1}{a}e^{a(x+1)}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{2a}(e^{a+1}-1)$

$=\frac{1}{a}e^{a+1}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{2a}(e^{a+1}-1)=\left(\frac{e}{2}-1\right)\frac{e^a}{a}$

(4) (3)から　$S'(a)=\left(\frac{e}{2}-1\right)\cdot\frac{ae^a-e^a}{a^2}=\left(\frac{e}{2}-1\right)\cdot\frac{(a-1)e^a}{a^2}$

$S'(a)=0$ とすると　$a=1$

よって，$S(a)$ の増減表は右のようになる。

したがって，$S(a)$ は $a=1$ のとき極小かつ最小

であるから，求める最小値は　$S(1)=\frac{e^2}{2}-e$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		↘	極小	↗

3 おまけ

$1<a<b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a}-\frac{1}{\log b}<\frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

解答　略

解説

$f(x)=\frac{1}{\log x}$ とすると，$x>1$ において $f(x)$ は微分可能であり　$f'(x)=-\frac{1}{x(\log x)^2}$

$1<a<b$ であるから，平均値の定理により，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$

すなわち　$\frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=f'(c)(b-a)\quad(a<c<b)$

を満たす実数 c が存在する。

ここで，$x(\log x)^2$ は $x>1$ において単調に増加するから，$f'(x)$ も $x>1$ において単調に増加する。

よって，$1<a<c<b$ のとき　$f'(a)<f'(c)$

ゆえに　$\frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=f'(c)(b-a)>f'(a)(b-a)=-\frac{b-a}{a(\log a)^2}$

したがって　$\frac{1}{\log a}-\frac{1}{\log b}<\frac{b-a}{a(\log a)^2}$

5月6日(水)　高２理系数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　】　　　　　　　　　　　　点/10点

$\boxed{1}$

(1)　曲線 C_1：$6y-x^2=k$ と曲線 C_2：$y=\log(x+2)$ が共有点をもち，この点で２つの曲線の接線が一致するとき，定数 k の値を求めよ。

(2)　(1) のとき，曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$

a を正の実数とする。関数 $f(x)=e^{a(x+1)}-ax$ とする。

(1)　$f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　原点から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(3)　この曲線と y 軸，および (2) で求めた接線によって囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　$S(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ おまけ

$1<a<b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a}-\frac{1}{\log b}<\frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。