1

解説

(1)　$3x=-3x+12k$ とおくと　　$6x=12k$

したがって　　$x=2k$

これを $y=3x$ に代入すると　　$y=6k$

よって，$y=3x$ と $y=-3x+12k$ の共有点の座標は

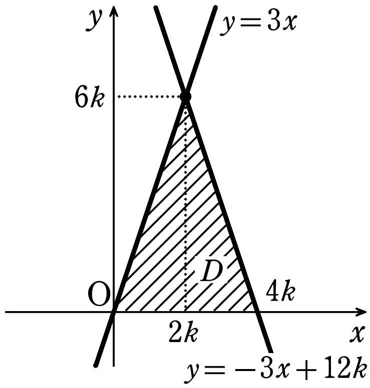
$(2k,\ 6k)$

$-3x+12k=0$ とおくと　　$3x=12k$

したがって　　$x=4k$

よって，$y=-3x+12k$ と x 軸の共有点の座標は

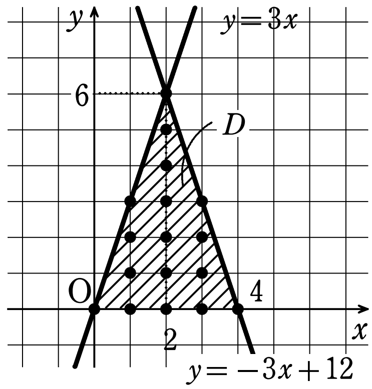
$(4k,\ 0)$



以上から，領域 D は右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

すなわち，D は3点 $(0,\ 0)$，([ア]$2k$，[イ]$6k$)，([ウ]$4k$，0) を頂点とする三角形の周および内部である。

$k=1$ のとき



$k=1$ のとき，D は右の図のようになり，D に含まれる格子点の個数は　　[エオ]17個

整数 j が $0\leqq j\leqq 2k$ を満たすとき，D に含まれる格子点で x 座標が j である点の個数は，y 座標が $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3j$ の ([カ]$3j+$[キ]1) 個ある。

したがって，D に含まれる格子点で x 座標が0以上 $2k$ 以下である点の個数 q は

$$q=\sum_{j=0}^{2k}(3j+1)=\sum_{j=1}^{2k}(3j+1)+(3\cdot 0+1)$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot(2k+1)+1\cdot 2k+1$$

$$={}^{ク}6k^2+{}^{ケ}5k+{}^{コ}1$$

D は直線 $x=2k$ に関して対称であるから，D に含まれる格子点で x 座標が $(2k+1)$ 以上 $4k$ 以下である点の個数は，x 座標が0以上 $(2k-1)$ 以下である点の個数と等しい。

x 座標が $2k$ である点の個数は　　$3\cdot 2k+1=6k+1$ (個)

したがって　　$6k^2+5k+1-(6k+1)=6k^2-k$ (個)

よって，D に含まれる格子点の個数 p は

$$p=6k^2+5k+1+(6k^2-k)={}^{サシ}12k^2+{}^{ス}4k+{}^{セ}1$$

(2)　$n=1$ のとき，$1\leqq z\leqq 2$ であり，z は整数であるから　　$z=1,\ 2$

すなわち，4つの不等式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数 r は，(1) で求めた格子点の

個数 p の $k=1$ のときと $k=2$ のときの和と一致する。

よって　　$r=(12\cdot1^2+4\cdot1+1)+(12\cdot2^2+4\cdot2+1)=17+57={}^{ソタ}74$

一般に，4 つの不等式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数 r は，(1) で求めた格子点の個数 p の $k=1$ のときから $k=2n$ のときまでの和と一致する。

すなわち

$$\begin{aligned} r&=\sum_{k=1}^{2n}(12k^2+4k+1)\\ &=12\cdot\frac{1}{6}\cdot2n(2n+1)(2\cdot2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}\cdot2n(2n+1)+1\cdot2n\\ &=4n(2n+1)(4n+1)+4n(2n+1)+2n\\ &=32n^3+24n^2+4n+8n^2+4n+2n={}^{チツ}32n^3+{}^{テト}32n^2+{}^{ナニ}10n \end{aligned}$$

2

(解説)

(1)　X が正規分布 $N(50,\ 9^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-50}{9}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=45.5$ のとき　　$Z=-0.5$

よって　　$P(X\geqq 45.5)=P(Z\geqq -0.5)=0.5+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$$=0.5+0.1915=0.{}^{\text{アイウエ}}6915$$

$X=63.5$ のとき　　$Z=1.5$

よって　　$P(X\geqq 63.5)=P(Z\geqq 1.5)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.5-0.4332=0.{}^{\text{オカキク}}0668$

(2)　母平均 50，母標準偏差 9 の母集団から，大きさ 144 の標本を無作為抽出するとき，

標本平均の平均 (期待値) は　　${}^{\text{ケコ}}50$

標準偏差は　　$\dfrac{9}{\sqrt{144}}=\dfrac{9}{12}={}^{\text{サ}}0.{}^{\text{シス}}75$

(3)　標本平均は 51.0，母標準偏差は 9，標本の大きさは 144 であるから，母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$51.0-1.96\cdot\frac{9}{\sqrt{144}}\leqq m\leqq 51.0+1.96\cdot\frac{9}{\sqrt{144}}$$

よって　　$51.0-1.47\leqq m\leqq 51.0+1.47$

ゆえに　　$49.53\leqq m\leqq 52.47$

小数第 2 位を四捨五入すると　　${}^{\text{セソ}}49.{}^{\text{タ}}5\leqq m\leqq {}^{\text{チツ}}52.{}^{\text{テ}}5$

(4)　信頼度 95 % の信頼区間の定義から，信頼区間が母平均 m を含む確率は 95 % すなわち 0.95 である。

よって，Y は二項分布 $B(304,\ 0.95)$ に従うから，平均は　　$304\cdot 0.95={}^{\text{トナニ}}288.{}^{\text{ヌ}}8$

標準偏差は　　$\sqrt{304\cdot 0.95\cdot 0.05}=\sqrt{4^2\cdot 19\cdot\dfrac{5\cdot 19}{10^2}\cdot\dfrac{5}{10^2}}=\dfrac{4\cdot 19\cdot 5}{10^2}={}^{\text{ネ}}3.{}^{\text{ノ}}8$

よって　　$P(Y\leqq 285)=P\left(\dfrac{Y-288.8}{3.8}\leqq\dfrac{285-288.8}{3.8}\right)=P\left(\dfrac{Y-288.8}{3.8}\leqq -{}^{\text{ハ}}1.{}^{\text{ヒフ}}00\right)$

304 は十分大きいから，$Z=\dfrac{Y-288.8}{3.8}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって　　$P(Z\leqq -1.00)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)=0.5-0.3413=0.1587$

小数第 2 位を四捨五入すると　　$P(Z\leqq -1.00)=0.{}^{\text{ヘホ}}16$

$\boxed{3}$

(解説)

$0 \leqq x < 1$ のとき

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt\right|$$
$$=\left|\int_0^x (-2t+1)\,dt\right|+\left|\int_x^1 (-2t+1)\,dt+\int_1^2 (4t-5)\,dt\right|$$
$$=|-x^2+x|+|x^2-x+1|$$

$0 \leqq x < 1$ で $-x^2+x \geqq 0$，$x^2-x+1>0$ であるから　　$g(x)=1$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$g(x)=\left|\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$
$$=\left|\int_0^1 (-2t+1)\,dt+\int_1^x (4t-5)\,dt\right|+\left|\int_x^2 (4t-5)\,dt\right|$$
$$=|2x^2-5x+3|+|2x^2-5x+2|$$

ここで，$2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$ であるから，

$1 \leqq x < \dfrac{3}{2}$ で　$2x^2-5x+3 \leqq 0$，

$\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 2$ で　$2x^2-5x+3 \geqq 0$

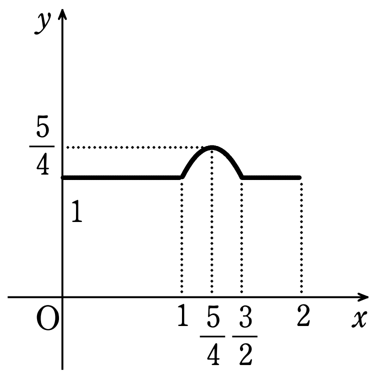
また，$2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$ であるから，$1 \leqq x \leqq 2$ で　$2x^2-5x+2 \leqq 0$

よって，$1 \leqq x < \dfrac{3}{2}$ で

$$g(x)=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 2$ で　$g(x)=1$

したがって，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになる．



よって，$x=\dfrac{5}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる．