4月8日(水)　春期講習会　中３甲陽PLUS数学　『再テスト』　氏名〔　　　　　　　　〕　　点/10点

$\boxed{1}$

方程式 $x^4+2x^2-3=0$ を解け。

[解答]　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{3}\,i$

(解説)

$x^4+2x^2-3=0$ から　$(x^2)^2+2x^2-3=0$

よって　$(x^2-1)(x^2+3)=0$　　　ゆえに　$x^2=1$　または　$x^2=-3$

したがって，求める方程式の解は　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{3}\,i$

$\boxed{2}$

a，b が実数のとき，3 次方程式 $x^3+ax^2+8x+b=0$ が $x=1+i$ を解にもつように a，b の値を定めよ。また，残りの 2 つの解を求めよ。

[解答]　$a=-5,\ b=6$；残りの解は $x=3,\ 1-i$

(解説)

$x=1+i$ を解にもつから　$(1+i)^3+a(1+i)^2+8(1+i)+b=0$

i について整理すると　$b+6+(2a+10)i=0$

a，b は実数であるから，$b+6$，$2a+10$ も実数である。

よって　$b+6=0,\ 2a+10=0$　　これを解いて　$a=-5,\ b=-6$

このとき，3 次方程式は　$x^3-5x^2+8x-6=0$

$P(x)=x^3-5x^2+8x-6$ とおくと　$P(3)=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

したがって　$P(x)=(x-3)(x^2-2x+2)$

よって　$(x-3)(x^2-2x+2)=0$

これを解くと　　$x=3,\ 1\pm i$

したがって，残りの解は　$x=3,\ 1-i$

$\boxed{3}$

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とおく。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が α と β を解にもつとき，係数 a，b の値を求めよ。また，この 3 次方程式のもう 1 つの解を求めよ。

[解答]　$a=-2,\ b=0$；もう 1 つの解は $x=1$

(解説)

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解 α，β を解にもつから，x^3+ax^2+bx+1 は x^2-x-1 を因数にもつ。

すなわち，x^3+ax^2+bx+1 は x^2-x-1 で割り切れる。

割り算を実行すると

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+a+1 \\ \hline
x^2-x-1 & x^3+ax^2+bx+1 \\
 & x^3\ \ -x^2\ \ -x \\ \hline
 & (a+1)x^2+(b+1)x+1 \\
 & (a+1)x^2-(a+1)x-(a+1) \\ \hline
 & \qquad (a+b+2)x+a+2
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&x^3+ax^2+bx+1\\
&=(x^2-x-1)(x+a+1)\\
&\qquad +(a+b+2)x+a+2 \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

よって　$a+b+2=0,\ a+2=0$

これを解くと　$a=-2,\ b=0$

また，このとき ① は

$x^3-2x^2+1=(x^2-x-1)(x-1)$

よって，3 次方程式のもう 1 つの解は　$x=1$

[別解]　2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

3 次方程式のもう 1 つの解を γ とすると，3 次方程式の解と係数の関係により

$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-1$

よって　$a=-(\alpha+\beta)-\gamma=-1-\gamma$　$\cdots\cdots$ ①

$b=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=-1+\gamma$　$\cdots\cdots$ ②

$(-1)\cdot\gamma=-1$　$\cdots\cdots$ ③

③ から　$\gamma=1$　　これを ①，② に代入して　$a=-2,\ b=0$

また，3 次方程式のもう 1 つの解は　$x=1$

$\boxed{1}$

方程式 $x^4+2x^2-3=0$ を解け。

$\boxed{2}$

a，b が実数のとき，3 次方程式 $x^3+ax^2+8x+b=0$ が $x=1+i$ を解にもつように a，b の値を定めよ。また，残りの 2 つの解を求めよ。

$\boxed{3}$

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とおく。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が α と β を解にもつとき，係数 a，b の値を求めよ。また，この 3 次方程式のもう 1 つの解を求めよ。