

1

$\triangle ABC$ において、 $\frac{\sin A}{\sqrt{7}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \sin C$ が成り立つとき

- (1) $\triangle ABC$ の内角のうち、最も大きい角の大きさを求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の内角のうち、2番目に大きい角の正接を求めよ。

2

円 O に内接する四角形 $ABCD$ において、

$$AB=3, BC=1, CD=3, DA=4$$

とするとき、次のものを求めよ。

- (1) A
- (2) 対角線 BD の長さ
- (3) 四角形 $ABCD$ の面積
- (4) 円 O の半径
- (5) $\triangle ABD$ の内接円の半径

3

$PA=PB=PC=3, AB=2, BC=3, CA=\sqrt{7}$ である三角錐 $PABC$ がある。頂点 P から底面 ABC へ下ろした垂線と底面 ABC との交点を H とする。次の値を求めよ。

- (1) AH の長さ
- (2) PH の長さ
- (3) $\triangle ABC$ の面積
- (4) 三角錐 $PABC$ の体積

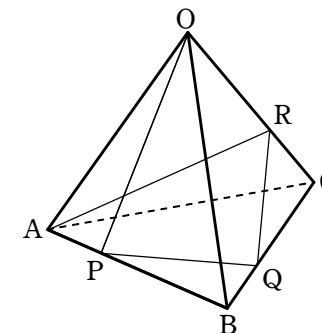
4

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形をしているか。

- (1) $a \sin A + b \sin B = c \sin C$
- (2) $b \cos A + a \cos B = b$
- (3) $a \cos A = b \cos B$

5

1辺の長さが a の正四面体 $OABC$ において、辺 AB , BC , OC 上にそれぞれ点 P , Q , R をとる。頂点 O から、 P , Q , R の順に3点を通り、頂点 A に至る最短経路の長さを求めよ。



6

1辺の長さが1の正十二角形の面積を求めよ。

7

$AB=3, AC=2, \angle A=60^\circ$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。線分 AD , BD の長さを求めよ。

8

$\triangle ABC$ において、辺 BC を $1:2$ に分ける点を D とする。 $a=6, b=5, c=7$ のとき、 AD の長さを求めよ。

9

円 O に内接する四角形 $ABCD$ は、 $AD \parallel BC$, $AB=3, BC=5, \angle ABC=60^\circ$ を満たす。このとき、次のものを求めよ。

- (1) 線分 AC の長さ
- (2) 辺 CD の長さ
- (3) 辺 AD の長さ
- (4) 円 O の半径
- (5) 四角形 $ABCD$ の面積

10

$\triangle ABC$ において、 $a=1+\sqrt{3}$ 、 $b=2$ 、 $B=45^\circ$ のとき、 c 、 A 、 C を求めよ。

11

水平な地面の地点 H に、地面に垂直にポールが立っている。2つの地点 A、B からポールの先端を見ると、仰角はそれぞれ 30° と 60° であった。また、地面上の測量では A、B 間の距離が 20 m、地点 H から 2 地点 A、B を見込む角度は 60° であった。このとき、ポールの高さを求めよ。ただし、目の高さは考えないものとする。

12

1 辺の長さが 6 の正四面体 OABC がある。辺 OA、OB、OC 上に、それぞれ点 L、M、N を $OL=3$ 、 $OM=4$ 、 $ON=2$ となるようにとる。このとき、 $\triangle LMN$ の面積を求めよ。

1

【解答】 (1) 150° (2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

2

【解答】 (1) $A = 60^\circ$ (2) $BD = \sqrt{13}$ (3) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{39}}{3}$ (5) $\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$

3

【解答】 (1) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ (3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (4) $\sqrt{5}$

4

【解答】 (1) $C = 90^\circ$ の直角三角形 (2) $b = c$ の二等辺三角形
(3) $a = b$ の二等辺三角形または $C = 90^\circ$ の直角三角形

5

【解答】 $\sqrt{7}a$

6

【解答】 $3(2 + \sqrt{3})$

7

【解答】 $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$, $BD = \frac{3\sqrt{7}}{5}$

8

【解答】 $AD = \sqrt{33}$

9

【解答】 (1) $\sqrt{19}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{57}}{3}$ (5) $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

10

【解答】 $c = \sqrt{2}$, $A = 105^\circ$, $C = 30^\circ$ または $c = \sqrt{6}$, $A = 75^\circ$, $C = 60^\circ$

11

【解答】 $\frac{20\sqrt{21}}{7} \text{ m}$

12

【解答】 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

1

(1) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ から $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

条件から $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって $a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに, $a = \sqrt{7}k$, $b = \sqrt{3}k$, $c = k$ ($k > 0$) とおける。

よって, a が最大の辺であるから, $\angle A$ が最大の角である。

余弦定理により $\cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + k^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot k} = \frac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって, 最大の角の大きさは $A = 150^\circ$

(2) (1) から, 2 番目に大きい角は $\angle B$

余弦定理により $\cos B = \frac{k^2 + (\sqrt{7}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}k} = \frac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

$1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{28}{25} - 1 = \frac{3}{25}$$

$A > 90^\circ$ より $B < 90^\circ$ であるから $\tan B > 0$

したがって $\tan B = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

2

- (1)
- $BD = x$
- とする。△ABD に余弦定理を適用して

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos A \quad \dots\dots ①$$

四角形 ABCD は円に内接するから $C = 180^\circ - A$

△BCD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos(180^\circ - A) \\ &= 1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos A \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

- ①, ② から
- $25 - 24 \cos A = 10 + 6 \cos A$

$$\text{よって } \cos A = \frac{1}{2} \quad \text{したがって } A = 60^\circ$$

- (2) ① より
- $x^2 = 9 + 16 - 24 \cos 60^\circ = 13$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{13} \quad \text{よって } BD = \sqrt{13}$$

- (3)
- $A = 60^\circ$
- より
- $C = 120^\circ$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \sin 120^\circ \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

- (4) 円 O は△ABD の外接円である。求める半径を
- R
- とすると

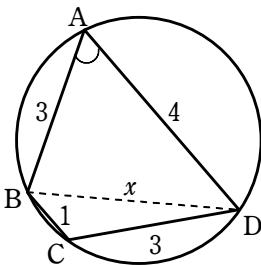
$$\text{正弦定理より, } \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{\sqrt{13}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

- (5) △ABD の内接円の半径を
- r
- とすると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} r (AB + BD + DA)$$

$$\text{より } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times r \times (3 + 4 + \sqrt{13})$$

$$r = \frac{3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7 + \sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{3}(7 - \sqrt{13})}{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6}$$



3

PA = PB = PC であるから、P から下ろした垂線と底面 ABC との交点 H は △ABC の外接円の中心である。

- (1)
- $\angle ABC = \theta$
- とおく。

△ABC において 余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって 正弦定理により

$$AH = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

- (2)
- $PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$

$$PH > 0 \text{ であるから } PH = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

- (3) (1) から
- $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

- (4) 三角錐 PABC の体積を
- V
- とすると
- $V = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times PH$
- であるから

$$(2), (3) \text{ より } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{15}}{3} = \sqrt{5}$$

4

- (1) △ABC の外接円の半径を
- R
- とする。

$$\text{正弦定理により } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

これらを等式 $a \sin A + b \sin B = c \sin C$ に代入すると

$$a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}$$

$$\text{両辺に } 2R \text{ を掛けて } a^2 + b^2 = c^2$$

よって、 $\triangle ABC$ は $C=90^\circ$ の直角三角形である。

$$(2) \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを等式 $b\cos A + a\cos B = b$ に代入すると

$$b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b$$

$$\text{すなわち } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = b$$

$$\text{両辺に } 2c \text{ を掛けて } b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 = 2bc$$

$$\text{ゆえに } 2c^2 = 2bc \quad \dots\dots ①$$

$$c \neq 0 \text{ であるから, } ① \text{ の両辺を } 2c \text{ で割ると } c = b$$

よって、 $\triangle ABC$ は $b=c$ の二等辺三角形である。

$$(3) \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを等式 $a\cos A = b\cos B$ に代入すると

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\text{両辺に } 2abc \text{ を掛けて } a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$\text{両辺を展開して } c \text{ について整理すると } (a^2 - b^2)c^2 - a^4 + b^4 = 0$$

$$\text{ゆえに } (a^2 - b^2)c^2 - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{よって } (a^2 - b^2)\{c^2 - (a^2 + b^2)\} = 0$$

$$\text{すなわち } (a+b)(a-b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$a > 0, b > 0 \text{ であるから } a + b > 0$$

$$\text{ゆえに, } ① \text{ から } a - b = 0 \text{ または } a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$\text{すなわち } a = b \text{ または } a^2 + b^2 = c^2$$

よって、 $\triangle ABC$ は $a=b$ の二等辺三角形または $C=90^\circ$ の直角三角形である。

5

右図のような展開図を考えると、四角形 $AOO'A'$ は平行四辺形であり、求める最短経路の長さは図の線分 OA' の長さである。

$$\triangle OAA' \text{ で } OA = a, AA' = 2a,$$

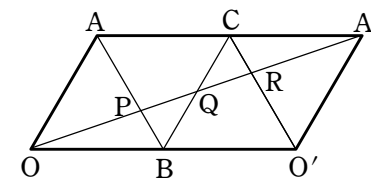
$\angle OAA' = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ であるから、余弦定理により

$$OA'^2 = AA'^2 + OA^2 - 2AA' \cdot OA \cos 120^\circ$$

$$= (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$a > 0, OA' > 0 \text{ であるから } OA' = \sqrt{7}a$$

よって、求める最短経路の長さは $\sqrt{7}a$



6

図のように、正十二角形を 12 個の合同な三角形に分けると

$$AB = 1, \angle AOB = 360^\circ \div 12 = 30^\circ$$

$OA = OB = a$ とすると、 $\triangle AOB$ において、

余弦定理により

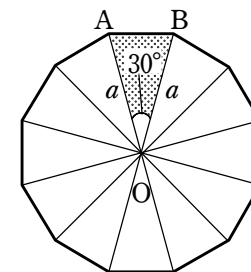
$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 30^\circ$$

$$\text{整理して } 1 = (2 - \sqrt{3})a^2$$

$$\text{よって } a^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{したがって } S = 12\triangle OAB = 12 \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 30^\circ$$

$$= 6(2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = 3(2 + \sqrt{3})$$



7

$AD = x$ とおく。

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \sin 30^\circ$$

よって $\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x$

ゆえに $\frac{5}{4}x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

したがって $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ すなわち $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

$\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 3^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{5} \cos 30^\circ = 9 + \frac{108}{25} - \frac{54}{5} = \frac{63}{25}$$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{\frac{63}{25}} = \frac{3\sqrt{7}}{5}$

参考 一般に、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とすると

$$AB : AC = BD : DC$$

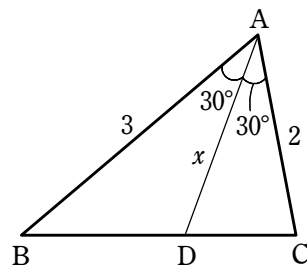
が成り立つ。このことを利用すると、 BD の長さは次のように求めることもできる。

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos 60^\circ = 7$$

$BC > 0$ であるから $BC = \sqrt{7}$

$BD : DC = AB : AC = 3 : 2$ であるから $BD = \frac{3}{5}BC = \frac{3\sqrt{7}}{5}$



8

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

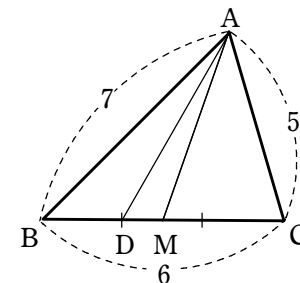
$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7}$$

また $BD = 2$

$\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$AD^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{7} = 33$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{33}$



9

(1) $\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 19$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{19}$

(2) 頂点 A, D から辺 BC にそれぞれ垂線 AH, DI を下ろすと、 $AD \parallel BC$ であるから、四角形 $AHID$ は長方形である。

よって $AH = DI$ ①,

$$\angle AHB = \angle DIC = 90^\circ \text{ ②}$$

また、四角形 $ABCD$ は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

よって $\angle CDI = \angle ADC - \angle ADI = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

ゆえに $\angle BAH = \angle CDI$ ③

①～③ から $\triangle ABH \cong \triangle DCI$ したがって $CD = BA = 3$

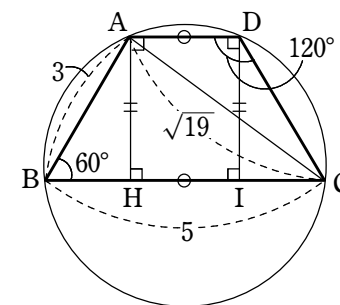
(3) $BH = CI = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$

よって $AD = HI = BC - BH - IC = 5 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 2$

(4) 円 O の半径を R とする。 $\triangle ABC$ において、正弦定理により

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \text{よって} \quad R = \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

(5) 求める面積は



$$\begin{aligned}\triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

別解 $\frac{1}{2}(AD + BC)AH = \frac{1}{2}(2 + 5) \cdot 3 \sin 60^\circ = \frac{21}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

10

余弦定理により

$$2^2 = c^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(1 + \sqrt{3})c \cos 45^\circ$$

整理すると

$$c^2 - \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})c + 2\sqrt{3} = 0$$

すなわち

$$c^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})c + \sqrt{2}\sqrt{6} = 0$$

よって $(c - \sqrt{2})(c - \sqrt{6}) = 0$ ゆえに $c = \sqrt{2}, \sqrt{6}$

[1] $c = \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2(1 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

したがって $C = 30^\circ$

よって $A = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

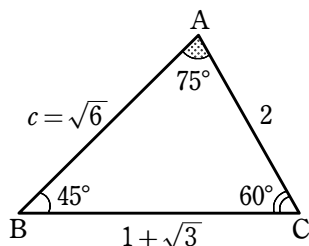
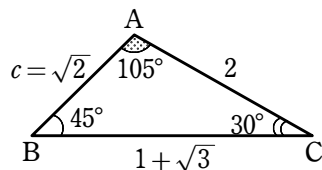
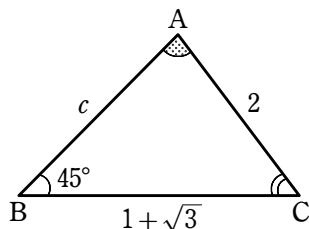
[2] $c = \sqrt{6}$ のとき

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2(1 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって $C = 60^\circ$

よって $A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

以上から $c = \sqrt{2}, A = 105^\circ, C = 30^\circ$ または $c = \sqrt{6}, A = 75^\circ, C = 60^\circ$



11

ポールの先端を P とし、ポールの高さを $PH = x$ (m) とする。

$\triangle PAH$ で $PH : AH = 1 : \sqrt{3}$

ゆえに $AH = \sqrt{3}x$ (m)

$\triangle PBH$ で $PH : BH = \sqrt{3} : 1$

よって $BH = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ (m)

$\triangle ABH$ において、余弦定理により

$$20^2 = (\sqrt{3}x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}x \cos 60^\circ$$

したがって $x^2 = \frac{1200}{7}$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{\frac{1200}{7}} = \frac{20\sqrt{21}}{7}$

よって、求めるポールの高さは $\frac{20\sqrt{21}}{7}$ m

12

$\triangle OLM$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned}LM^2 &= OL^2 + OM^2 - 2 \cdot OL \cdot OM \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13\end{aligned}$$

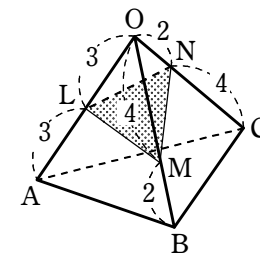
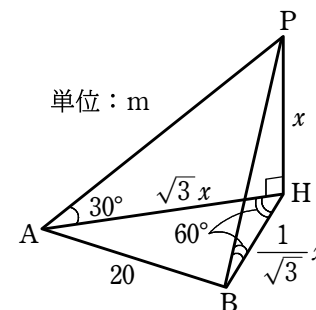
$\triangle OMN$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned}MN^2 &= OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cos 60^\circ \\ &= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12\end{aligned}$$

$\triangle ONL$ において、余弦定理により

$$NL^2 = ON^2 + OL^2 - 2 \cdot ON \cdot OL \cos 60^\circ = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

ゆえに $LM = \sqrt{13}, MN = 2\sqrt{3}, NL = \sqrt{7}$



よって $\cos \angle MLN = \frac{LM^2 + NL^2 - MN^2}{2 \cdot LM \cdot NL} = \frac{13 + 7 - 12}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{91}}$

したがって $\sin \angle MLN = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{91}}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{91}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

ゆえに $\triangle LMN = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot NL \sin \angle MLN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$