1

解答　(1)　$x=-4+3t$，$y=2-t$；$x+3y-2=0$

(2)　$x=t-3$，$y=-4t+5$；$4x+y+7=0$

解説

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする。

(1)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-4,\ 2)$，$\vec{d}=(3,\ -1)$ であるから

$(x,\ y)=(-4,\ 2)+t(3,\ -1)=(-4+3t,\ 2-t)$

ゆえに　$\begin{cases} x=-4+3t & \cdots\cdots ① \\ y=2-t & \cdots\cdots ② \end{cases}$　(t は媒介変数)

①+②×3 から　$x+3y-2=0$

(2)　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-3,\ 5)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$ であるから

$(x,\ y)=(1-t)(-3,\ 5)+t(-2,\ 1)=(t-3,\ -4t+5)$

ゆえに　$\begin{cases} x=t-3 & \cdots\cdots ③ \\ y=-4t+5 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$　(t は媒介変数)

③×4+④ から　$4x+y+7=0$

2

解答　(1)　$3x-4y+12=0$　　(2)　$\alpha=45^\circ$

解説

(1)　直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

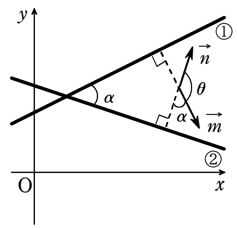
ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-4,\ y-6)$

よって　$3\times(x-4)-4\times(y-6)=0$

したがって　$3x-4y+12=0$

(2)　$2x-4y+11=0$　……①

$x+3y-12=0$　……②



$\vec{m}=(2,\ -4)$，$\vec{n}=(1,\ 3)$ とすると，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は，それぞれ2直線①，②の法線ベクトルである。

よって，$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2\times1+(-4)\times3}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$　であるから　$\alpha=180^\circ-\theta=45^\circ$

3

解答　(1)　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　　(2)　$\vec{p}=\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$　(t は実数)

解説

(1)　点 P は線分 AB の中点 M を通り，

AB に垂直な直線上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに　$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

よって　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

(2)　求める直線は，点 M を通り，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を方向ベクトルとする直線であるから，

そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\overrightarrow{\mathrm{GM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　(t は実数)　……①

点 G に関する位置ベクトルを考えると

$\overrightarrow{\mathrm{GG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}-\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}-(-\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

以上より　①は　$\vec{p}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+t(2\vec{a}+\vec{b})$

すなわち　$\vec{p}=\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$　(t は実数)

4

解答　(1)　線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円

(2)　△ABC の重心を中心とする半径 1 の円

(3)　線分 AB を 1:2 に内分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の円

(4)　線分 OA の垂直二等分線

(5)　点 A を中心とする半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円

(6)　点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円

解説

(1)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$ から　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})|=5$

すなわち　$|5\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$

両辺を 5 で割って　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{5}\right|=1$

よって，点 P が描く図形は，線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円である。

(2)　A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$ から　$|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})|=3$

ゆえに　$|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$

すなわち　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})|=3$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|=1$　……①

△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

よって，① から　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=1$

したがって，点 P は G を中心とする半径 1 の円を表す。

(3)　$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$　から

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$

よって，点 P は線分 AB を 1:2 に内分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の円を描く。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$2\vec{p}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=0$

両辺を 2 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{MP}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は M と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の中点 M を通り OA に垂直な直線，すなわち線分 OA の垂直二等分線である。

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ の両辺に $|\vec{a}|^2$ を加えると　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

したがって，点 P が描く図形は，点 A を中心とする半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円である。

(6)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　から　$\vec{p}\cdot\{\vec{p}-(\vec{b}-\vec{a})\}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$|\vec{p}|^2+(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

すなわち　$\{\vec{p}-(-\vec{a})\}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

よって，点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円。

5

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 C，D，E をとると，

平行四辺形 ODEC の周および内部

(2)　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(3)　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，△OCD の周および内部

(5)　$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 B′ をとると，△OAB′ の周および内部

解説

(1)　$s=k$ (k は定数) とすると，$0\leqq k\leqq 2$ で　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

t の値が 0 から 3 まで変化すると，点 P は線分 QR 上を Q から R まで動く。

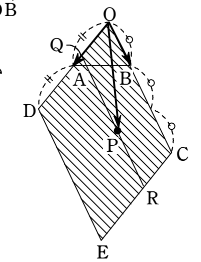
(ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$)

次に，k の値が 0 から 2 まで変化すると，点 Q，R は，QR∥OC (∥DE) の状態を保ちながら，それぞれ線分 OD，CE 上を，O から D，C から E まで動く。

(ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$)

よって，点 P の存在範囲は

平行四辺形 ODEC の周および内部



(2)　$s+t=3$ から　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$ とおくと

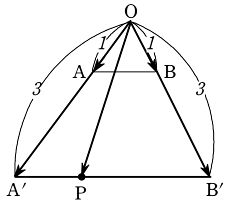
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。



(3)　$2s+3t=6$ から　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$

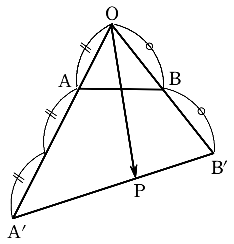
また　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，P の存在範囲は線分 A′B′ である。



(4)　$s+t=k$ とおく。

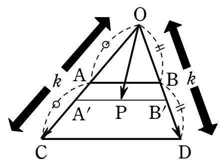
$s+t=k$ から　　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A′，B′ をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，$0<k\leqq 2$ の範囲で k が変わるとき，線分 A′B′ 上の点は，点 O を除く △OCD の周および内部を動く。



したがって，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

(5)　$0\leqq 3s+2t\leqq 3$ から　　$0\leqq s+\dfrac{2}{3}t\leqq 1$

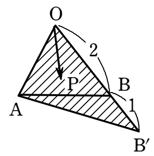
また　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}t\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

ここで，$\dfrac{2}{3}t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$0\leqq s+t'\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$，

よって，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 B′ をとると，P の存在範囲は △OAB′ の周および内部である。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\end{cases}$；$2x+y-3=0$　　(2)　$\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-t\end{cases}$；$x+3y-14=0$

解説

(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(-1,\ 5)+t(1,\ -2)$

すなわち　$\begin{cases}x=-1+t\\y=5-2t\end{cases}$

t を消去すると　　$y=5-2(x+1)$　　すなわち　　$2x+y-3=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 5)+t(2,\ 4)$

すなわち　$\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-t\end{cases}$

t を消去すると　　$x=-1+3(5-y)$　　すなわち　　$x+3y-14=0$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$4x-y-14=0$　　(2)　$45°$

解説

(1)　直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ から　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+2)$，$\vec{n}=(-4,\ 1)$ から

$-4(x-3)+(y+2)=0$　　すなわち　　$4x-y-14=0$

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ　$\overrightarrow{n_1}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4)$　とおける。

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times 2-3\times 4=-10$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，

$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

であるから，$\overrightarrow{n_1}$ と $\overrightarrow{n_2}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　　$\theta=135°$

したがって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす鋭角は　　$180°-135°=45°$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　（$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ でもよい）

(2)　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (t は実数)　　(3)　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

解説

(1)　点 A を通り，BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　　すなわち　　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　（$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ でもよい）

(2)　辺 BC の中点を $\mathrm{M}(\vec{m})$ とすると　　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，求めるベクトル方程式は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{m}$ (t は実数)　　すなわち　　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (t は実数)

(3)　辺 BC の中点 M を通り，辺 BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

整理して　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　線分 AB を 3：4 に内分する点を中心とする半径１の円

(2)　線分 BC を 3:2 に内分する点を D，AD を 5:1 に内分する点を E とすると，E を中心とする半径１の円

(3)　辺 BC の中点を中心とし，点 A を通る円

(4)　線分 OA を3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線

(5)　線分 OA を2:1 に外分する点を中心とする半径 $\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円

(6)　AB を直径の両端とする円

解説

(1)　$|4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=7$ から　$|4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})|=7$

すなわち　$|7\overrightarrow{\mathrm{AP}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$

両辺を７で割って　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{7}\right|=1$

よって，点 P が描く図形は，線分 AB を 3：4 に内分する点を中心とする半径１の円である。

(2)　A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=6$ から　$|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})|=6$

ゆえに　$|(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}})-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=6$

すなわち　$|6\overrightarrow{\mathrm{AP}}-(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}})|=6$

よって　$\left|6\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}\right|=1$　……①

ここで　$\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

BC を 3:2 に内分する点を D，AD を 5:1 に内分する点を E とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって，$\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　となり，①から　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=1$

したがって，BC を 3:2 に内分する点を D，AD を 5:1 に内分する点を E とすると，点 P は E を中心とする半径１の円を表す。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})|=2\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|$

であるから，ベクトル方程式は

$2\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=|\vec{b}+\vec{c}|$

ゆえに　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\left|\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|$

よって，この方程式の表す図形は，BC の中点を中心とし，点 A を通る円である。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}+2\vec{a}|=|\vec{p}-5\vec{a}|$ の両辺を２乗すると　$|\vec{p}+2\vec{a}|^2=|\vec{p}-5\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-10\vec{p}\cdot\vec{a}+25|\vec{a}|^2$

ゆえに　$14\vec{p}\cdot\vec{a}-21|\vec{a}|^2=0$

両辺を 14 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{3}{2}|\vec{a}|^2=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA を3:1 に外分する点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\vec{a}$ であるから

$\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は Q と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA を3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線である。

(5)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=(\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)^2$

ゆえに，点 P の描く図形は，線分 OA を2:1 に外分する点を中心とする半径 $\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円である。

(6)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}(2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　から　$\vec{p}\cdot\{\vec{p}-(\vec{b}-\vec{a})\}=2\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

よって，点 P の描く図形は，AB を直径の両端とする円である。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ となる点 C，D，E をとると，平行四辺形 ADEC の周および内部

(2)　$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(3)　$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，△OCD の周および内部

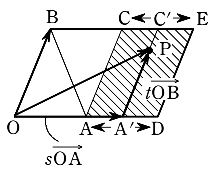
(5)　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，△OA′B′の周および内部

解説

(1)　s を固定して，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ここで，t を $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で変化させると，点 P は右の図の線分 A′C′ 上を動く。



ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

次に，s を $1\leqq s\leqq 2$ の範囲で変化させると，線分 A′C′ は図の線分 AC から DE まで平行に動く。

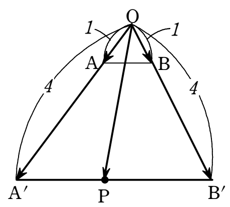
ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって，点 P の存在範囲は

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ とすると，平行四辺形 ADEC の周および内部

である。

(2)　$s+t=4$ から　$\dfrac{s}{4}+\dfrac{t}{4}=1$



ここで，$\dfrac{s}{4}=s'$，$\dfrac{t}{4}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(4\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(4\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

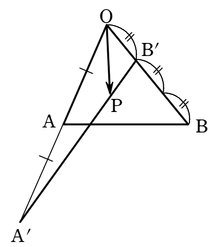
よって，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。

(3)　$s+6t=2$ から　$\dfrac{s}{2}+3t=1$



また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+3t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$3t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$，

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

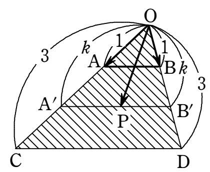
よって，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。

(4)　$s+t=k$ とおく。

$s+t=k$ から　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

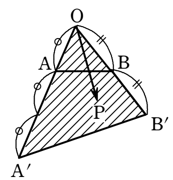
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A′，B′ をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A′B′ である。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，$0<k\leqq 3$ の範囲で k が変わるとき，線分 A′B′ 上の点は，点 O を除く △OCD の周および内部を動く。

したがって，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

(5)　$0\leqq 2s+3t\leqq 6$ から　$0\leqq\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$



また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

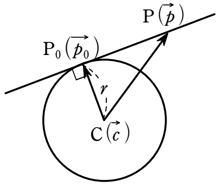
よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は △OA′B′の周および内部である。

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　中心 C，半径 r の円の接線上に点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ があることは，$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=\vec{0}$ が成り立つことと同値である．



よって，接線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}=\vec{p_0}-\vec{c}$ であるから

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot\{(\vec{p}-\vec{c})-(\vec{p_0}-\vec{c})\}=0$$

したがって　$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})-|\vec{p_0}-\vec{c}|^2=0$

$|\vec{p_0}-\vec{c}|^2=\mathrm{CP_0}^2=r^2$ であるから　　$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$　……①

(2)　中心が原点 $\mathrm{O}(\vec{0})$，半径 r の円上の点 $\mathrm{P_0}(\vec{p_0})$ における接線のベクトル方程式は，

① において，$\vec{c}=\vec{0}$ とおくと得られるから　$\vec{p_0}\cdot\vec{p}=r^2$　……②

$\vec{p_0}=(x_0,\ y_0)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと　　$\vec{p_0}\cdot\vec{p}=x_0x+y_0y$

これを ② に代入して，接線の方程式は　　$x_0x+y_0y=r^2$

2

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-6)^2=4$　　(2)　$x^2+y^2-\dfrac{5}{2}bx+b^2=0$

(3)　$(x-11)^2+(y+7)^2=72$

解説

(1)　$|\vec{p}|^2=x^2+y^2$，$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x+3y$ より $x^2+y^2-8x-12y+48=0$

ゆえに　　$(x-4)^2+(y-6)^2=4$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y)+(x-b,\ y)=(2x-b,\ 2y)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y)+(-2x+2b,\ -2y)=(-x+2b,\ -y)$

$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$ から　$(2x-b)(-x+2b)+2y(-y)=0$

すなわち　$-2x^2+5bx-2b^2-2y^2=0$

したがって　$x^2+y^2-\dfrac{5}{2}bx+b^2=0$

(3)　$2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ から　　$4|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　$4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}=9\{(x-7)^2+(y+3)^2\}$

展開して整理すると　　$x^2+y^2-22x+14y+98=0$

よって　　$(x-11)^2+(y+7)^2=72$

3

解答　(ア)　$-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　(イ)　4

解説

(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\cos60^\circ=1$

$\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$，$\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ とすると

$$|\vec{u}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times1^2-12\times1+9\times2^2=28$$

$$|\vec{v}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\times1+2^2=12$$

$|\vec{u}|>0$，$|\vec{v}|>0$ であるから

$$|\vec{u}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7},\ |\vec{v}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

また　　$\vec{u}\cdot\vec{v}=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=4\times1^2-4\times1-3\times2^2=-12$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}}={}^{ア}-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(イ)　原点 O に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=\vec{v}$ とする。

$(\vec{p}-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b})=0$ から　　$(\vec{p}-\vec{u})\cdot(\vec{p}-\vec{v})=0$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{UP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{VP}}=0$

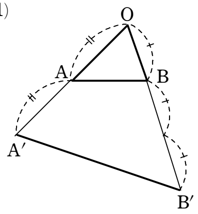
これは，線分 UV を直径とする円のベクトル方程式である。

よって，求める円の半径は　　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{UV}}|}{2}=\dfrac{|\vec{v}-\vec{u}|}{2}=\dfrac{|4\vec{b}|}{2}={}^{イ}4$

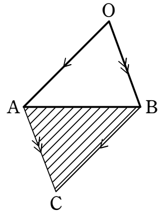
4

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]　斜線部分．境界線上の点を含む　　(3)　[図]

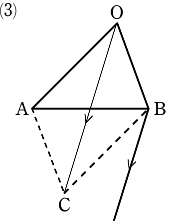
(1)



(2)



(3)



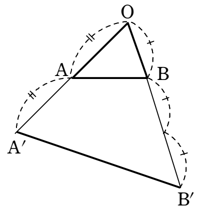
解説

(1)　$s=\dfrac{\alpha}{2}$，$t=\dfrac{\beta}{3}$ とおくと　$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ となる．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′, B′ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

したがって，終点 P の集合は図の線分 A′B′ である．

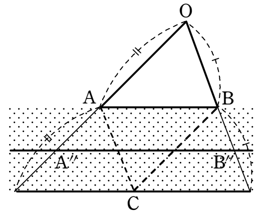


(2)　$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，P は平行四辺形 OACB の周および内部にある．

$1\leqq\alpha+\beta\leqq2$ のとき

$\alpha+\beta=k$ $(1\leqq k\leqq2)$ とすると　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

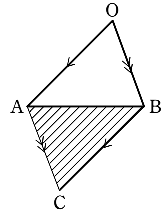


また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A″, B″ をとると，P は直線 A″B″ 上を動く．

ここで，k を $1\leqq k\leqq2$ の範囲で動かすと，P は図の影の部分を動く．

したがって，$1\leqq\alpha+\beta\leqq2$，$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ のとき，終点 P の集合は図のようになる．ただし，境界線上の点を含む．



(3)　$\beta-\alpha=1$ から　$\beta=\alpha+1$

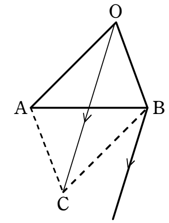
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\alpha+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\qquad=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\alpha(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\alpha\geqq0$ であるから，終点 P の集合は

点 B を端点とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な半直線である．

[図]



$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}a$　　(2)　$3a$　　(3)　$\sqrt{3}\,a^2+\dfrac{2}{3}\pi a^2$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=a\times 2a\times\cos\frac{2}{3}\pi=-a^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……① であるから

$$|\vec{d}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{9}(4|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$$
$$=\frac{1}{9}\{4\times a^2+4\times(-a^2)+(2a)^2\}=\frac{4}{9}a^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{2}{3}a$

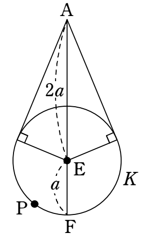
(2)　$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})|=|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

① より，$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから　　$|3\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=a$　……②

ここで，$3\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とすると，② は

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=a$　　　すなわち　　$|\vec{p}-\vec{e}|=a$

よって，点 P は，中心が E，半径が a の円周上の点である。
この円を K とおく。
ここで，直線 AE と円 K の交点のうち，点 A から遠い方を F とする。

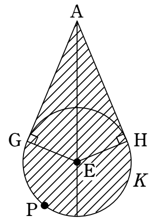


$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ が最大となるのは，点 P が点 F に一致するときである。

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=3\times\dfrac{2}{3}a=2a$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ の最大値は $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|+|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|=3a$ である。

(3)　線分 AP が通過してできる図形は右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。
ここで，G，H は A から円 K に引いた２本の接線の接点である。



$$\cos\angle\mathrm{AEH}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{AE}}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle\mathrm{AEH}<\pi$ であるから　　$\angle\mathrm{AEH}=\dfrac{\pi}{3}$

また，$\angle\mathrm{AEH}=\angle\mathrm{AEG}$ であるから　　$\angle\mathrm{GEH}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，線分 AP が通過してできる図形の面積 S は

$S=2\times\triangle\mathrm{AEH}+$(円 K の面積)$-$(扇形 EGH の面積)

$$=2\times\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{3}\,a+\pi a^2-\frac{1}{2}a^2\times\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\,a^2+\frac{2}{3}\pi a^2$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，線分 OB，OC を隣り合う２辺とする平行四辺形の周と内部

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，線分 OC，OD を隣り合う２辺とする平行四辺形の周と内部

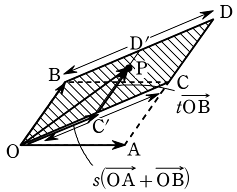
解説

(1)　$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

よって，点 P の存在範囲は
線分 OB，OC を隣り合う２辺とする平行四辺形の周と内部
である。



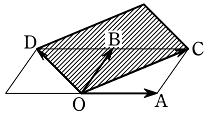
(2)　$(s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$
であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

ゆえに，点 P の存在範囲は
線分 OC，OD を隣り合う２辺とする平行四辺形の周と内部。



$\boxed{3}$

解答　(1)　$6\sqrt{6}$　　(2)　$18\sqrt{6}$　　(3)　$\dfrac{27\sqrt{6}}{5}$

解説

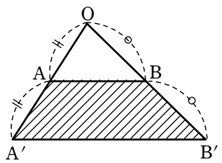
(1)　余弦定理により　　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{12}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{1}{5}$

$\sin\angle\mathrm{AOB}>0$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P が存在しうる部分は右の図の斜線部分である。
$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{OA'B'}$ であり，その相似比は $1:2$ であるから，求める面積は

$$\triangle\mathrm{OA'B'}-\triangle\mathrm{OAB}=2^2\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=3\triangle\mathrm{OAB}=3\times 6\sqrt{6}$$
$$=18\sqrt{6}$$



(3)　$2s=s'$ とおくと

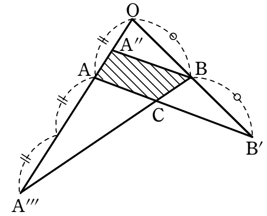
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(s'\geqq 0,\ t\geqq 0,\ 1\leqq s'+t\leqq 2)$

$s+3t\leqq 3$ から　　$\dfrac{s}{3}+t\leqq 1$

$\dfrac{s}{3}=s''$ とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s''(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(s''\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s''+t\leqq 1)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA'''}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A″，A‴ をとると，点 P が存在しうる部分は，四角形 AA″BB′ の内部と △OA‴B の内部の共通部分で，右の図の斜線部分である。
線分 AB′ と線分 A‴B の交点を C とすると

$$\triangle\mathrm{A'''A''B}=\triangle\mathrm{OA'''B}-\triangle\mathrm{OA''B}$$
$$=3\triangle\mathrm{OAB}-\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{5}{2}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{5}{2}\times 6\sqrt{6}=15\sqrt{6}$$



$\triangle\mathrm{A'''A''B}\backsim\triangle\mathrm{A'''AC}$ であり，その相似比は $5:4$ であるから，求める面積は

$$\triangle\mathrm{A'''A''B}-\triangle\mathrm{A'''AC}=\triangle\mathrm{A'''A''B}-\left(\frac{4}{5}\right)^2\triangle\mathrm{A'''A''B}$$
$$=\frac{9}{25}\triangle\mathrm{A'''A''B}=\frac{9}{25}\times 15\sqrt{6}=\frac{27\sqrt{6}}{5}$$

1

解答 (1) $\dfrac{12}{5}$　(2) $\dfrac{28}{13}$

解説

(1) $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ ……①, $\vec{q}=\frac{1}{4}(-\vec{a}+2\vec{b})$ ……② とする。

②から　$4\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$ ……③

(①−③)÷2 から　$\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{p}-4\vec{q})$ ……④

(①+③)÷4 から　$\vec{b}=\frac{1}{4}(\vec{p}+4\vec{q})$ ……⑤

よって　$|\vec{a}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{q}+16|\vec{q}|^2)=\frac{1}{4}(32-8\vec{p}\cdot\vec{q})=8-2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$|\vec{b}|^2=\frac{1}{16}(|\vec{p}|^2+8\vec{p}\cdot\vec{q}+16|\vec{q}|^2)=\frac{1}{16}(32+8\vec{p}\cdot\vec{q})=2+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であるから　$8-2\vec{p}\cdot\vec{q}=2+\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$　これを解いて　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{12}{5}$

(2) ④，⑤から　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\frac{1}{4}(\vec{p}+4\vec{q})-\frac{1}{2}(\vec{p}-4\vec{q})=-\frac{1}{4}\vec{p}+3\vec{q}$

2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるから　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

ここで　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{1}{4}\vec{p}+3\vec{q}\right)\cdot(\vec{q}-\vec{p})=\frac{1}{4}|\vec{p}|^2-\frac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}+3|\vec{q}|^2$

$=4-\frac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}+3=7-\frac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}$

よって　$7-\frac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}=0$　すなわち　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{28}{13}$

2

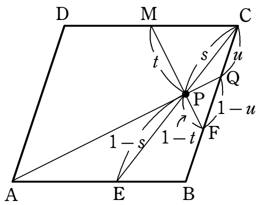
解答 (1) $\dfrac{19}{23}\vec{a}+\dfrac{13}{23}\vec{b}$　(2) 10：9

解説

(1) MP：PF$=t:(1-t)$，CP：PE$=s:(1-s)$ とする．

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AM}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-t)\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=\frac{1+t}{2}\vec{a}+\frac{3-2t}{3}\vec{b}$ ……①



また　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AC}$

$=s\times\frac{3}{5}\vec{a}+(1-s)(\vec{a}+\vec{b})$

$=\left(1-\frac{2}{5}s\right)\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ ……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，

①, ②より　$\frac{1+t}{2}=\frac{5-2s}{5}$, $\frac{3-2t}{3}=1-s$

これを解いて　$s=\frac{10}{23}$, $t=\frac{15}{23}$

ゆえに，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1+\frac{15}{23}}{2}\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}\times\frac{15}{23}\right)\vec{b}=\frac{19}{23}\vec{a}+\frac{13}{23}\vec{b}$

(2) CQ：QF$=u:(1-u)$ とおくと，

$\overrightarrow{AQ}=u\overrightarrow{AF}+(1-u)\overrightarrow{AC}=u\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-u)(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}u\right)\vec{b}$

また　$\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AP}$ より，$\overrightarrow{AQ}=\frac{19}{23}l\vec{a}+\frac{13}{23}l\vec{b}$ であるから，

$l=\frac{23}{19}$, $u=\frac{9}{19}$ となり CQ：QF$=\frac{9}{19}:\frac{10}{19}=9:10$ から　FQ：QC$=10:9$

3

解答 (1) 2　(2) $\sqrt{3}$　(3) 30°　(4) 15°

解説

(1) $|\overrightarrow{OB}|^2=(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2$

$=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=4$

よって　$|\overrightarrow{OB}|=2$　答

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)+(\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$

$=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta$

$=\sqrt{3}\sin90^\circ-\cos90^\circ=\sqrt{3}$　答

別解　$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ から

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$　答

(3) $|\overrightarrow{OA}|=1$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$ であるから　$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle AOB\leqq180^\circ$ であるから　$\angle AOB=30^\circ$　答

(4) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ とすると　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

(2)により　$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta=0$

$\cos2\theta\neq0$ であるから　$\tan2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ\leqq2\theta\leqq180^\circ$ であるから　$2\theta=30^\circ$　ゆえに　$\theta=15^\circ$　答

4

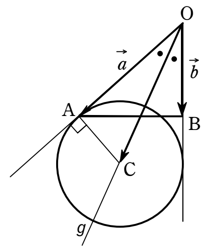
解答　$\vec{c}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

解説

点Cは∠AOBの二等分線上にあるから

$\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=t\left(\dfrac{\vec{a}}{3}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$　(t は実数)

と表される。



また，中心Cの円が点Aで直線OAに接するから

CA⊥OA

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ……①

ここで　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\left\{\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{a}-\frac{t}{2}\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}$

$=\left(1-\frac{t}{3}\right)|\vec{a}|^2-\frac{t}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(1-\frac{t}{3}\right)\times3^2-\frac{t}{2}\times4$

$=9-5t$

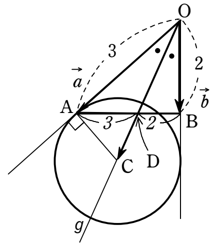
①から　$9-5t=0$　ゆえに　$t=\frac{9}{5}$

したがって　$\vec{c}=\frac{9}{5}\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right)=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}$

別解　直線OCと辺ABの交点をDとすると

AD：DB＝OA：OB＝3：2

よって　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$



$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$ (k は実数) と表されるから，$\frac{k}{5}=t$ とおくと

$\vec{c}=t(2\vec{a}+3\vec{b})$ (t は実数)

と表される。

また，中心Cの円が点Aで直線OAに接するから

CA⊥OA

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ……①

ここで　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\{(1-2t)\vec{a}-3t\vec{b}\}\cdot\vec{a}$

$=(1-2t)|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(1-2t)\times3^2-3t\times4=9-30t$

①から　$9-30t=0$　ゆえに　$t=\frac{3}{10}$

したがって　$\vec{c}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}$

5

解答 (1) $\overrightarrow{AE}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=3\vec{d}$　(2) $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$　(3) 略

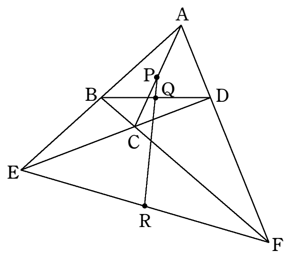
解説

(1) $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DE}=h\overrightarrow{DC}$ とすると

$\overrightarrow{AE}=k\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=h(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=h\left(\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}-\vec{d}\right)$

$=\frac{4}{5}h\vec{b}-\frac{2}{5}h\vec{d}$



ゆえに

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{d}+\left(\frac{4}{5}h\vec{b}-\frac{2}{5}h\vec{d}\right)$

$=\frac{4}{5}h\vec{b}+\left(1-\frac{2}{5}h\right)\vec{d}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は平行でないから

$\frac{4}{5}h=k$，$1-\frac{2}{5}h=0$

これを解いて　$k=2$，$h=\frac{5}{2}$　よって　$\overrightarrow{AE}=2\vec{b}$

$\overrightarrow{AF}=l\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}=m\overrightarrow{BC}$ とすると　$\overrightarrow{AF}=l\vec{d}$

$\overrightarrow{BF}=m(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=m\left(\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}-\vec{b}\right)=-\frac{1}{5}m\vec{b}+\frac{3}{5}m\vec{d}$

ゆえに　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{b}-\frac{1}{5}m\vec{b}+\frac{3}{5}m\vec{d}=\left(1-\frac{1}{5}m\right)\vec{b}+\frac{3}{5}m\vec{d}$

これから　$1-\frac{1}{5}m=0$，$\frac{3}{5}m=l$

これを解いて　$l=3$，$m=5$　よって　$\overrightarrow{AF}=3\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}}{2}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}$

よって　$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}-\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$

(3) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{d}\right)=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{10}\vec{d}$

ゆえに　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}-\left(\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{10}\vec{d}\right)=\dfrac{3}{5}(\vec{b}+2\vec{d})=\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}\right)$

よって　$\overrightarrow{PR}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{QR}$

したがって，3点P，Q，Rは同一直線上にある。

$\boxed{6}$

解答　(1) $\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{BS}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$　(3) $\dfrac{3}{4}$　(4) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

解説

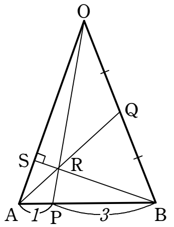
(1) 点Pは辺ABを1：3に内分するから

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

点Rは直線OP上にあるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$ (kは実数) とすると

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{4}k\vec{a}+\dfrac{1}{4}k\vec{b}=\dfrac{3}{4}k\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}k\right)\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$=\dfrac{3}{4}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{OQ}$



点Rは直線AQ上にあるから　$\dfrac{3}{4}k+\dfrac{1}{2}k=1$

よって　$k=\dfrac{4}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

(2) (1)から　$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}\vec{a}-\dfrac{4}{5}\vec{b}$

点Sは直線BR上にあるから，$\overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BR}$ (mは実数) とすると

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{BR}=\dfrac{3}{5}m\vec{a}+\left(1-\dfrac{4}{5}m\right)\vec{b}$

点Sは辺OA上にあるから　$1-\dfrac{4}{5}m=0$　　よって　$m=\dfrac{5}{4}$

このとき　$\overrightarrow{BS}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{BR}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　　ゆえに，(2)から　$\dfrac{3}{4}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=1$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{4}$

(4) (3)から

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

$\boxed{7}$

解答　(1) 2　(2) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

(3) $AP=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，$AQ=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(4) $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

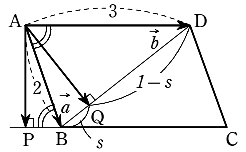
解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=AB\times AD\times\cos\angle BAD=2\times3\times\dfrac{1}{3}=2$

(2) 点Pは直線BC上にあり，AD∥BCであるから

$\overrightarrow{BP}=k\vec{b}$　(kは実数)

と表される。



よって　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\vec{a}+k\vec{b}$

AD⊥APであるから　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ゆえに　$\vec{b}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　$2+k\cdot3^2=0$　　よって　$k=-\dfrac{2}{9}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}$

また，BQ：QD$=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AQ}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

BD⊥AQであるから　$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$　　よって　$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2=0$

よって　$(s-1)\cdot2^2+(1-2s)\cdot2+s\cdot3^2=0$

ゆえに　$9s-2=0$　　よって　$s=\dfrac{2}{9}$

したがって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

(3) $AP=|\overrightarrow{AP}|$，$AQ=|\overrightarrow{AQ}|$ であるから

$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)$

$=|\vec{a}|^2-\dfrac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{4}{81}|\vec{b}|^2=2^2-\dfrac{4}{9}\cdot2+\dfrac{4}{81}\cdot3^2=\dfrac{32}{9}$

よって　$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\dfrac{32}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|^2=\left|\dfrac{1}{9}(7\vec{a}+2\vec{b})\right|^2=\dfrac{1}{81}(7\vec{a}+2\vec{b})\cdot(7\vec{a}+2\vec{b})$

$=\dfrac{1}{81}(49|\vec{a}|^2+28\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{1}{81}(49\cdot2^2+28\cdot2+4\cdot3^2)=\dfrac{288}{81}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{\dfrac{288}{81}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{9}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

(4) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}-\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)=-\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}=-\dfrac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})$

よって　$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left|-\dfrac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})\right|^2=\dfrac{4}{81}(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\dfrac{4}{81}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{4}{81}(2^2-4\cdot2+4\cdot3^2)=\dfrac{4}{81}\cdot32$

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\dfrac{4}{81}\cdot32}=\dfrac{2}{9}\cdot4\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

よって　$PQ=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

$\boxed{8}$

解答　(ア) $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$　(イ) $(1,\ 2)$　(ウ) $0\leqq s'+t'\leqq\dfrac{1}{3}$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

解説

$0\leqq s+t\leqq\dfrac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ から

$0\leqq2s+2t\leqq1$，$2s\geqq0$，$2t\geqq0$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ から　$\overrightarrow{OP}=2s\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

よって，$\overrightarrow{OA'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ とおくと，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部である。

ゆえに，点A′の座標は　ア$\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

また，点B′の座標は　イ$(1,\ 2)$

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ であるから

$\overrightarrow{OQ}=s'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{3}{2}s'\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{2}t'\overrightarrow{OB}$

よって，点Qの存在範囲が点Pの存在範囲と一致するとき

$0\leqq\dfrac{3}{2}s'+\dfrac{3}{2}t'\leqq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}s'\geqq0$，$\dfrac{3}{2}t'\geqq0$

ゆえに，実数s'とt'の満たす条件は

ウ$0\leqq s'+t'\leqq\dfrac{1}{3}$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

$\boxed{9}$

解答　(1) $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$　(2) $\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$

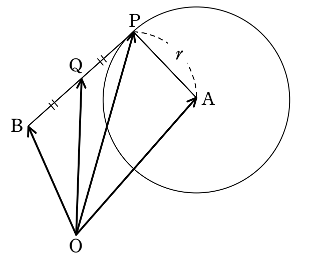
(3) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$，$(0,\ 2)$

解説

(1) $|\overrightarrow{AP}|=r$

また，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ であるから　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$

(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OB})$



よって　$\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$

別解　(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB})$ から

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$

これを(1)の結果に代入すると

$|2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=r$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$

(3) $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(2-1,\ 5-1)=\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\left(x-\dfrac{1}{2},\ y-2\right)$

(2) の結果と $r=1$ から，D の方程式は　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$

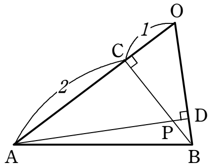
$x=0$ とおくと　$(y-2)^2=0$　　ゆえに　$y=2$

したがって，求める共有点の座標は　$(0,\ 2)$

$\boxed{1}$

解答　(1) $60°$　　(2) $t=\dfrac{3}{4}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

解説



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

すなわち　　$(t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$

$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ を代入して　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$　……①

ゆえに　　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle\mathrm{AOB}<180°$ であるから　　$\angle\mathrm{AOB}=60°$

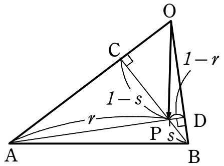
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから　　$\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2$　……②

①，② より　　$\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$　　　$|\vec{a}|\neq 0$ であるから　　$|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}|\vec{b}|$

したがって　　$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}|\vec{b}|}{2|\vec{b}|}=\dfrac{3}{4}$



(3)　AP : PD $=r:(1-r)$，BP : PC $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-r)\vec{a}+\dfrac{3}{4}r\vec{b}$　……③

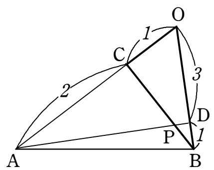
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$　……④

③，④ より　　$(1-r)\vec{a}+\dfrac{3}{4}r\vec{b}=\dfrac{1}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$1-r=\dfrac{1}{3}s$，　$\dfrac{3}{4}r=1-s$

これを解いて　　$r=\dfrac{8}{9}$，$s=\dfrac{1}{3}$　　　$s=\dfrac{1}{3}$ を ④ に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



別解　$t=\dfrac{3}{4}$ より　　OD : DB $=3:1$

△OBCと直線 AD について，メネラウスの定理を適用して

$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}\cdot\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=1$

よって　　$\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=2$　　　ゆえに　　CP : PB $=2:1$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\cos 2\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\beta=75°$，$105°$

(3) $s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　正弦定理により　　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$

よって　　$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45°}$

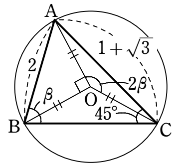
ゆえに　　$\sin\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

また　　$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-2\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\angle\mathrm{ACB}=45°$ であるから　　$0°<\beta<135°$　　　よって　　$0°<2\beta<270°$

ゆえに，$\cos 2\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　　$2\beta=150°$，$210°$

したがって　$\beta=75°$，$105°$



(3)　△ABC が鋭角三角形であるから　　$\beta=75°$

円周角の定理により　　$\angle\mathrm{AOB}=2\angle\mathrm{ACB}=90°$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

また，OA $=$ OB であるから　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2}$

すなわち　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2}$

円周角の定理により　　$\angle\mathrm{AOC}=2\beta=150°$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 150°$

$=(\sqrt{2})^2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$

更に，$\angle\mathrm{BOC}=360°-(90°+150°)=120°$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 120°=(\sqrt{2})^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s，t は実数) とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(\sqrt{2})^2+t\cdot 0=2s$

ゆえに，$2s=-\sqrt{3}$ から　　$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=s\cdot 0+t(\sqrt{2})^2=2t$

よって，$2t=-1$ から　　$t=-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3-3t}{5-3t}\vec{a}+\dfrac{2t}{5-3t}\vec{c}$　　(2) $t=\dfrac{2}{5}$

解説

(1)　AP : PL $=m:(1-m)$ とすると

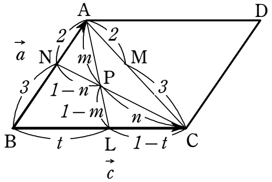
$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+m\overrightarrow{\mathrm{BL}}=(1-m)\vec{a}+mt\vec{c}$　……①

また，CP : PN $=n:(1-n)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=n\overrightarrow{\mathrm{BN}}+(1-n)\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{3}{5}n\vec{a}+(1-n)\vec{c}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$$1-m=\frac{3}{5}n,\quad mt=1-n$$



n を消去して整理すると　$(5-3t)m=2$

$0<t<1$ であるから　$5-3t\neq0$

よって　$m=\dfrac{2}{5-3t}$

① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3-3t}{5-3t}\vec{a}+\dfrac{2t}{5-3t}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BM}}=(\vec{a}+\vec{c})-\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{c})=\dfrac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{5-3t}\{3(1-t)\vec{a}+2t\vec{c}\}=\frac{1}{5-3t}\{2\vec{a}+(5-5t)\vec{c}\}$$

P，M，D が一直線上にあり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから　$5-5t=3$

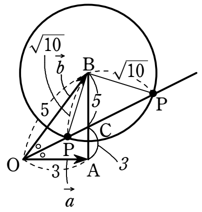
よって　$t=\dfrac{2}{5}$

4

解答　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

解説

円との交点を P とすると，点 P は ∠AOB の二等分線上にあるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=t\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{5}\right)\ (t\text{ は実数})$$

と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{t}{3}\vec{a}+\left(\dfrac{t}{5}-1\right)\vec{b}$

$\mathrm{BP}=\sqrt{10}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=10$ であるから

$$\frac{t^2}{9}|\vec{a}|^2+2\times\frac{t}{3}\left(\frac{t}{5}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\frac{t}{5}-1\right)^2|\vec{b}|^2=10$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times5\times\dfrac{3}{5}=9$ を代入して

$$t^2+6t\left(\frac{t}{5}-1\right)+(t-5)^2=10\qquad\text{整理して}\qquad 16t^2-80t+75=0$$

よって　$(4t-5)(4t-15)=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{15}{4}$

したがって，求める位置ベクトルは　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

別解　∠AOB の二等分線と AB の交点を C とすると，AC : CB＝OA : OB＝3 : 5 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\times\frac{5\vec{a}+3\vec{b}}{3+5}$$

$\dfrac{t}{8}=k$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(5\vec{a}+3\vec{b})$ と表される。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=5k\vec{a}+(3k-1)\vec{b}$

そこで，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=10$ から $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$ を代入すると

$48k^2-16k+1=0$　　これを解いて　$k=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{12}$

したがって，求める位置ベクトルは　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

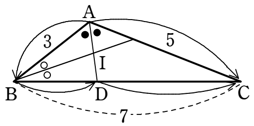
5

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　(2)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(3)　$\sqrt{3}\leqq S\leqq\dfrac{25\sqrt{3}}{16}$

解説

(1)　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

BD : DC＝AB : AC＝3 : 5



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+5}=\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})$

また　$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{8}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{8}\times7=\dfrac{21}{8}$

△ABD において　AI : ID＝AB : BD＝3 : $\dfrac{21}{8}$＝8 : 7

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　……①

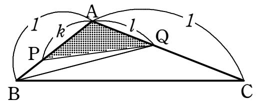
(2)　△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

$0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{BAC}=120°$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\vec{c}$ $(0<k\leqq1,\ 0<l\leqq1)$ とすると，△APQ の面積 S は



$$S=kl\triangle\mathrm{ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}kl$$

PI : IQ＝t : $(1-t)$ $(0<t<1)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)k\vec{b}+tl\vec{c}$　……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$(1-t)k=\dfrac{1}{3}$　……③，　$tl=\dfrac{1}{5}$　……④

よって　$k=\dfrac{1}{3(1-t)}$，$l=\dfrac{1}{5t}$

ゆえに　$S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{3(1-t)}\cdot\dfrac{1}{5t}=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$

ここで，$0<k\leqq1$ と ③ から　$1-t\geqq\dfrac{1}{3}$　　よって　$t\leqq\dfrac{2}{3}$

$0<l\leqq1$ と ④ から　$t\geqq\dfrac{1}{5}$

ゆえに，t のとりうる値の範囲は　$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$

$4t(1-t)=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ であるから，$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$ の範囲で $4t(1-t)$ は

$t=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値 $4\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{25}$，　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 1

をとる。

したがって，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{3}}{1}\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{\frac{16}{25}}\qquad\text{すなわち}\qquad\sqrt{3}\leqq S\leqq\frac{25\sqrt{3}}{16}$$

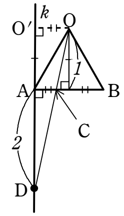
6

解答　(1)　$m=2$，$n=1$　(2)　$s=-\dfrac{14}{5}$，$t=\dfrac{7}{2}$

解説

(1)　点 O から直線 k に垂線 OO′ を引く。

△OCA : △ACD＝1 : 2 であるから　O′A : O′D＝1 : 3



また　$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'D}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$

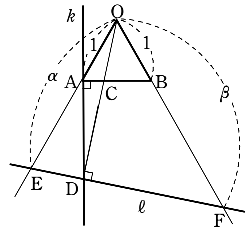
$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$m=2$，$n=1$

(2)　△OAB は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから



$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos60°=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(\alpha\neq0,\ \beta\neq0)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$

ここで

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=-2\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(2\beta-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=-2\alpha\times1^2+(2\beta-\alpha)\times\dfrac{1}{2}+\beta\times1^2=-\dfrac{5}{2}\alpha+2\beta$

よって　$-\dfrac{5}{2}\alpha+2\beta=0$　……①

また　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\dfrac{1}{\beta}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

点 D は直線 EF 上にあるから　$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$　……②

① から　$\beta=\dfrac{5}{4}\alpha$　　これを ② に代入して　$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{4}{5\alpha}=1$

これを解くと　$\alpha=\dfrac{14}{5}$　　このとき　$\beta=\dfrac{7}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\dfrac{14}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから　$s=-\dfrac{14}{5}$，$t=\dfrac{7}{2}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=3\sqrt{2}$

(3)　$t=\frac{1}{2}$，$s=\frac{3}{2}$ で最小値 4

解説

(1)　x，y を実数として，$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=8$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=20$ に代入すると　$\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=8$，$\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=20$

ゆえに　$2x+2y=8$，$2x+10y=20$

よって　$x=\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$　したがって　$\vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

(2)　l を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\vec{a}+(1-l)\vec{b}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに　$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ …… ①

(1) の結果から，① の左辺は

$$\left\{l\vec{a}+(1-l)\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\left\{\left(l-\frac{5}{2}\right)\vec{a}+\left(-l-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=(2l-2)\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(l-\frac{5}{2}\right)|\vec{a}|^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2$$

$$=4l-4-2l+5-10l-5=-8l-4$$

よって，① から　$-8l-4=0$　すなわち　$l=-\frac{1}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-3\vec{a}$　から　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=3\sqrt{2}$

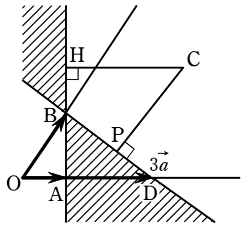
(3)　$(s+t-1)(s+3t-3)\leqq 0$

から

$$s+t\geqq 1,\quad \frac{s}{3}+t\leqq 1$$

または

$$s+t\leqq 1,\quad \frac{s}{3}+t\geqq 1$$



ゆえに，$3\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 D をとると，点 P の存在する範囲は図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。

また，(1) より点 C は直線 OA，OB で挟まれた部分のうち，線分 BD に関して点 O と反対側の領域にあることがわかるから，線分 BD 上に点 P があるときの $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ の最小値を求めればよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(s-\frac{5}{2}\right)\vec{a}+\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{b}$$

から　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\left(s-\frac{5}{2}\right)^2|\vec{a}|^2+2\left(s-\frac{5}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2|\vec{b}|^2$

P が線分 BD上 の点から　$s=-3t+3$，$0\leqq t\leqq 1$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=2\left(-3t+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-3t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)+10\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$

$$=16t^2-16t+20=16\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+16$$

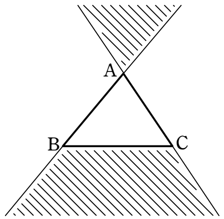
ゆえに，$0\leqq t\leqq 1$，$0\leqq s\leqq 3$ から，$t=\frac{1}{2}$，$s=\frac{3}{2}$ で $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は最小値 16 をとり，このとき $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ は最小値 4 をとる。

4 は $\mathrm{CH}=3\sqrt{2}$ より小さいから，これが求める最小値である。

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　［図］境界線を含まない



解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{c+b}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　等式から　$-a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

変形して　$(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

また，条件 (a) から　$a+b+c\neq 0$

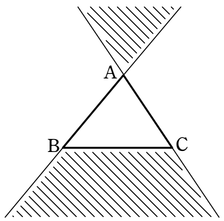
よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに，(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

[1]　$a+b+c>0$ のとき，条件 (a) より $a<0$ であるから

$b+c>a+b+c>0$　よって　$\frac{b+c}{a+b+c}>1$

[2]　$a+b+c<0$ のとき，条件 (a) より $b+c>0$ であるから　$\frac{b+c}{a+b+c}<0$

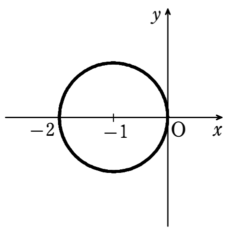


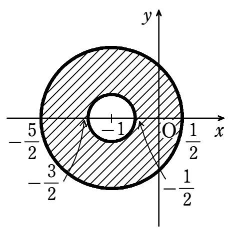
ゆえに，点 D は線分 BC（B，C を除く）上の任意の点であり [1]，[2] から，点 P は線分 AD の外分点（端点を除く）全体を動く。

よって，図の斜線部分。ただし，境界線を除く。

$\boxed{9}$

解答　(1)　［図］　(2)　［図］，境界線を含む





解説

P は点 A (2，0) を中心とする半径 1 の円 C_1 上を動くから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1 \quad \cdots\cdots ①$$

Q は点 B (−4，0) を中心とする半径 2 の円 C_2 上を動くから

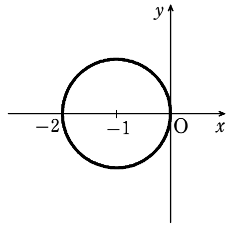
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2 \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ を変形して

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots\cdots ③$$

② に代入して　$|2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$

すなわち　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|=1$



$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=(-1,\ 0)$ であるから，点 S は点 (−1，0) を中心とする半径 1 の円上を動く。よって，点 S の動く範囲は右の図のようになる。

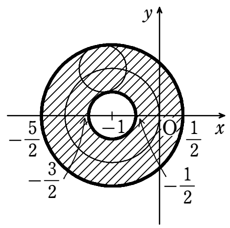
(2)　③ から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OR}}-2\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

これを ① に代入すると

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OR}}-2\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$$

すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\frac{1}{2}$



よって，点 R は点 S を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円上を動く。

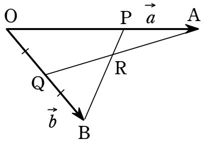
また，(1) より，点 S が点 (−1，0) を中心とする半径 1 の円上を動くことから，点 R の動く範囲は右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。

1

解答 $\frac{2}{5} \leqq t < 1$

解説

条件から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}$



QR : RA $=r:(1-r)$ $(0<r<1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=r\vec{a}+\frac{1-r}{2}\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

PR : RB $=s:(1-s)$ $(0<s<1)$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-s)t\vec{a}+s\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $0°<\theta<180°$ であるから　$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，①，② より　$r=(1-s)t$，　$\frac{1-r}{2}=s$

よって　$r=\frac{t}{2-t}$ $(0<t<1)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{t}{2-t}\vec{a}+\frac{1-t}{2-t}\vec{b}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\frac{t}{2-t}\vec{a}+\frac{1-t}{2-t}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{1}{2-t}\{-t|\vec{a}|^2+(1-t)|\vec{b}|^2+(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\&=\frac{1}{2-t}\{-9t+4(1-t)+6(2t-1)\cos\theta\}\\&=\frac{1}{2-t}\{6(2t-1)\cos\theta-13t+4\}\end{aligned}$$

ここで，$0<t<1$ であるから　$2-t\neq0$

ゆえに，求める条件は，任意の θ $(0°<\theta<180°)$ に対して，$6(2t-1)\cos\theta-13t+4\neq0$ が成り立つことである。

ここで，$\cos\theta=p$ とすると　$-1<p<1$

よって，$f(p)=6(2t-1)p-13t+4$ とすると，$-1<p<1$を満たすすべての p について $f(p)\neq0$ が成り立つような t の値の範囲を求めればよい。

[1]　$t=\frac{1}{2}$ のとき

$f(p)=-\frac{5}{2}$ であるから，$f(p)\neq0$ を満たす。

[2]　$0<t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$ のとき

$f(p)$ は1次関数であるから，$-1<p<1$ を満たすすべての p について $f(p)\neq0$ が成り立つための条件は

$$f(-1)f(1)\geqq0$$

ゆえに　$(-25t+10)(-t-2)\geqq0$

よって　$(5t-2)(t+2)\geqq0$　　ゆえに　$t\leqq-2$，$\frac{2}{5}\leqq t$

$0<t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$との共通範囲は　$\frac{2}{5}\leqq t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$

[1]，[2] から，求める t の値の範囲は　$\frac{2}{5}\leqq t<1$

2

解答 (1) 略　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$

解説

(1) (B) から　$|\vec{b}\cdot\vec{c}|\leqq|\vec{b}||\vec{c}|=1$

よって，(A) から　$|-\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq1$

したがって　$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……①

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であると仮定すると，(B) から　$\vec{b}=\vec{a}$　または　$\vec{b}=-\vec{a}$

$\vec{b}=\vec{a}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2=1$ となり，① に矛盾する。

$\vec{b}=-\vec{a}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|^2=-1$ となり，① に矛盾する。

したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない。

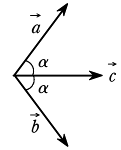
(2) $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を α，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を β とする。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ から　$|\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ を代入すると　$\cos\alpha=\cos\beta$

$0°\leqq\alpha\leqq180°$，$0°\leqq\beta\leqq180°$ であるから　$\alpha=\beta$

(1) の結果より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角は，右の図のようになっている。



$\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ から　$\cos\alpha=-\sqrt{3}\cos2\alpha$

よって

$$\begin{aligned}&\cos\alpha=-\sqrt{3}(2\cos^2\alpha-1)\\&2\sqrt{3}\cos^2\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}=0\\&(2\cos\alpha+\sqrt{3})(\sqrt{3}\cos\alpha-1)=0\\&\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は　$\frac{1}{2}$ または $-\frac{1}{3}$

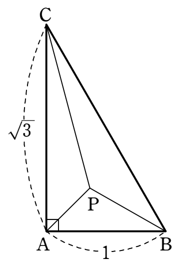
3

解答 (1)　$\angle\mathrm{APB}=120°$，$\angle\mathrm{APC}=120°$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\frac{4}{\sqrt{7}}$

解説

(1)　$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ ……①



① より，$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right)$であるから

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|$$

両辺を2乗すると　$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2}$

よって　$1=1+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+1$

ゆえに　$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=\cos\angle\mathrm{APB}$ であるから　$\cos\angle\mathrm{APB}=-\frac{1}{2}$

よって　$\angle\mathrm{APB}=120°$

① より，$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right)$であるから　$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|$

両辺を2乗して上と同様に計算すると　$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=-\frac{1}{2}$

よって，$\cos\angle\mathrm{APC}=-\frac{1}{2}$ から　$\angle\mathrm{APC}=120°$

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=90°$，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{3}$ から　$\angle\mathrm{ABC}=60°$

よって　$\angle\mathrm{PAB}=180°-\angle\mathrm{APB}-\angle\mathrm{PBA}$

$=180°-120°-\angle\mathrm{PBA}=60°-\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{PBC}$

また　$\angle\mathrm{BPC}=360°-\angle\mathrm{APB}-\angle\mathrm{APC}=360°-120°-120°=120°$

よって　$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}$

したがって　$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PBC}$

AB : BC $=1:2$であるから，△PAB と △PBC の相似比は $1:2$ である。

$\mathrm{AP}=x$ とおくと，AP : BP $=1:2$ から　$\mathrm{BP}=2x$

また，PB : PC $=1:2$ から　$\mathrm{PC}=2\mathrm{PB}=4x$

△PABに余弦定理を適用すると　$x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot2x\cos120°=1^2$

よって　$7x^2=1$　　$x>0$ から　$x=\frac{1}{\sqrt{7}}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\frac{4}{\sqrt{7}}$

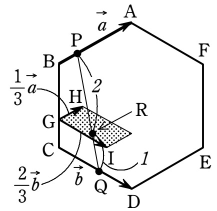
4

解答 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

解説

点 P は辺 AB 上を動くから

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=s\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ $(0\leqq s\leqq1)$



と表される。同様に，点 Q は辺 CD 上を動くから

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ $(0\leqq t\leqq1)$

と表される。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{b}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\vec{b}$

と表される。

点 R は線分 PQ を $2:1$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}}&=\frac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{2+1}=\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\vec{b})\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+s\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)+t\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right) \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで，G を $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす点とし，H，I を

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{GI}}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

を満たす点とする。

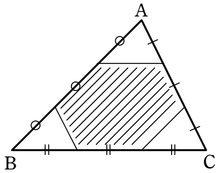
s と t はそれぞれ $0\leqq s\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$ を満たすから，① より，点 R の通りうる範囲は

線分 GH，GI を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部である。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° であり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ であるから，求める面積は

$$\mathrm{GH}\cdot\mathrm{GI}\sin 60^\circ=\left|\frac{1}{3}\vec{a}\right|\left|\frac{2}{3}\vec{b}\right|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{5}$

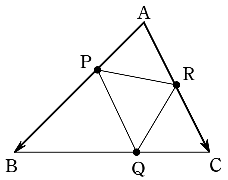
$\boxed{\text{解答}}$ ［図］，ただし，境界線は含まない



（解説）

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $(0<s<1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(0<t<1)$，
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ $(0<u<1)$ とする。
△PQR の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

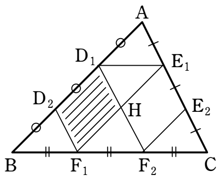


辺 AB の 3 等分点を A に近い方から $\mathrm{D_1}$，$\mathrm{D_2}$，
辺 AC の 3 等分点を A に近い方から $\mathrm{E_1}$，$\mathrm{E_2}$，
辺 BC の 3 等分点を B に近い方から $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{F_2}$ とする。
また，$\mathrm{D_1F_2}$ と $\mathrm{E_1F_1}$ の交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}+s\overrightarrow{\mathrm{D_1D_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{D_1H}}$$

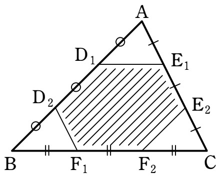
であり，$0<s<1$，$0<t<1$ であるから，点 S は平行四辺形 $\mathrm{D_1D_2F_1H}$ の内部を動く。



この点 S に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+u\overrightarrow{\mathrm{F_1F_2}}$$

であり，$0<u<1$ であるから，△PQR の重心 G の存在範囲は六角形 $\mathrm{D_1D_2F_1F_2E_2E_1}$ の内部であり，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線は含まない。



$\boxed{6}$

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 中心の位置ベクトルは $\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$，半径は $\frac{2}{3}k+1$　(2) $\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$

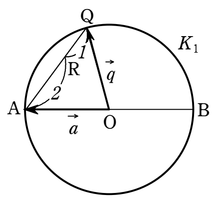
（解説）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{q}}{3}-(-\vec{a})=\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}$

よって　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\vec{q}-\vec{a}+k\left(\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{q}\right)$

$$=\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$

ゆえに　$\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}=\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$



よって　$\left|\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\left|\frac{2}{3}k+1\right||\vec{q}|$

$k>0$ より $\frac{2}{3}k+1>0$ であり，$|\vec{q}|=1$ であるから

$$\left|\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\frac{2}{3}k+1$$

したがって，点 P が描く図形 K_2 は中心の位置ベクトルが $\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$，半径が $\frac{2}{3}k+1$ の円である。

(2) (1) から，円 K_2 の内部に点 A が含まれるための条件は

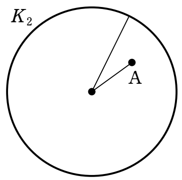
$$\left|\vec{a}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|<\frac{2}{3}k+1$$

よって　$\left|2-\frac{4}{3}k\right||\vec{a}|<\frac{2}{3}k+1$

$|\vec{a}|=1$ であるから　$\left|2-\frac{4}{3}k\right|<\frac{2}{3}k+1$

両辺に 3 を掛けて　$|6-4k|<2k+3$

ゆえに　$-2k-3<6-4k<2k+3$



$-2k-3<6-4k$ から　$k<\frac{9}{2}$ ……①

$6-4k<2k+3$ から　$k>\frac{1}{2}$ ……②

①，② の共通範囲は　$\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$　これは $k>0$ に適する。

したがって，求める k の値の範囲は　$\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$