ちょっと確認

1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-3$$

2

$a_1=\dfrac{1}{5},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

1

(解説)

$a_{n+1}=4a_n-3$ を変形すると　　$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=4b_n$，$b_1=a_1-1=6-1=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列であるから　　$b_n=5\cdot 4^{n-1}$

ゆえに　　$a_n=b_n+1=5\cdot 4^{n-1}+1$

別解　$a_{n+1}=4a_n-3$ ……① で n の代わりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3 \quad \cdots\cdots ②$$

②−① から　　$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_{n+1}=4b_n,\ b_1=a_2-a_1=(4\cdot 6-3)-6=15$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 15，公比 4 の等比数列であるから　　$b_n=15\cdot 4^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}15\cdot 4^{k-1}=6+\frac{15(4^{n-1}-1)}{4-1}=5\cdot 4^{n-1}+1 \quad \cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　　$5\cdot 4^0+1=6$

$a_1=6$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$a_n=5\cdot 4^{n-1}+1$

2

(解説)

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ ……① とする。

① において，$a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$ であるから，$a_n=0$ となる n があると仮定すると　　$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$

ところが $a_1=\dfrac{1}{5}$ $(\neq 0)$ であるから，これは矛盾。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。

① の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4-\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=4-b_n$　　　これを変形すると　　$b_{n+1}-2=-(b_n-2)$

また　　$b_1-2=\dfrac{1}{a_1}-2=5-2=3$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 3，公比 -1 の等比数列で

$$b_n-2=3\cdot(-1)^{n-1} \quad すなわち \quad b_n=3\cdot(-1)^{n-1}+2$$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$

3

(解説)

漸化式を変形して

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=2-0=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad すなわち \quad a_{n+1}-2a_n=2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割ると　　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2}=0$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=0+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n-1)$$

$a_n=2^nb_n$ であるから　　$a_n=2^n\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)=(n-1)\cdot 2^{n-1}$