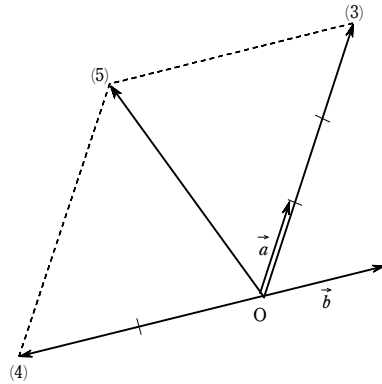
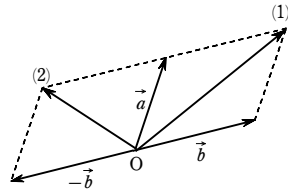


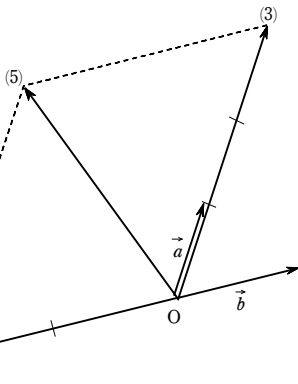
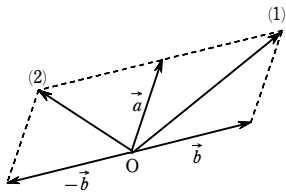
1

解答 (1)~(5) [図]



解説

(1)~(5) [図]



2

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) \text{ (左辺)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = \text{(右辺)}$$

$$(2) \text{ (左辺)} - \text{(右辺)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) \\ = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$$

よって (左辺)=(右辺)

3

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 3\vec{b} - 3\vec{a} = 3(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ であり, } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ は平行でないから } \overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}, \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$$

$$(2) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3\vec{a} - 5\vec{b}) - (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = -2\vec{b} - (\vec{a} - 3\vec{b}) = -(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\text{よって } \overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{PR}$$

したがって, 3点 P, Q, R は一直線上にある。

4

$$\text{解答 } \overrightarrow{DF} = -2\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

解説

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = -\vec{b} + (-2\vec{a}) \\ = -2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \\ = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EQ} = 2\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ = 2\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

5

$$\text{解答 } \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$$

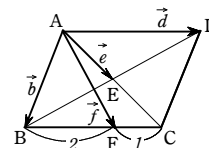
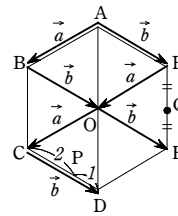
解説

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{よって } 2\vec{e} = \vec{b} + \vec{d} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3\vec{f} = 3\vec{b} + 2\vec{d} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \text{ から } \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \text{ から } \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$$

6

$$\text{解答 (1) } \textcircled{1} (3, -6), 3\sqrt{5} \quad \textcircled{2} (-2, 0), 2 \quad \textcircled{3} (11, -10), \sqrt{221}$$

$$(2) \textcircled{1} (2, 3), \sqrt{13} \quad \textcircled{2} (8, -6), 10$$

解説

$$(1) \textcircled{1} 3\vec{a} = 3(1, -2) = (3, -6)$$

$$|3\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (-3, 2) = (1-3, -2+2) = (-2, 0)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$$\textcircled{3} 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, -2) - 3(-3, 2) = (2, -4) - (-9, 6) \\ = (2 - (-9), -4 - 6) = (11, -10)$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{11^2 + (-10)^2} = \sqrt{221}$$

$$(2) \textcircled{1} \overrightarrow{OA} = (2, 3)$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{BC} = (5 - (-3), -2 - 4) = (8, -6)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

7

$$\text{解答 (1) } \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \quad (2) (-6, 8)$$

解説

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{よって } \vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$(2) \vec{b} = -10\vec{e} = -10\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (-6, 8)$$

8

$$\text{解答 } \vec{c} = \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$$

解説

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とおくと } (3, 7) = s(3, 5) + t(1, -1) \\ = (3s + t, 5s - t)$$

$$\text{よって } 3s + t = 3, 5s - t = 7 \quad \text{これを解いて } s = \frac{5}{4}, t = -\frac{3}{4}$$

$$\text{したがって } \vec{c} = \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$$

9

$$\text{解答 (1) } t = 6 \quad (2) t = 1 \text{ で最小値 } \sqrt{13}$$

解説

$$\vec{p} + t\vec{q} = (5, 1) + t(-3, 2) = (5 - 3t, 1 + 2t)$$

$$(1) \vec{p} + t\vec{q} \neq \vec{0}, \vec{r} \neq \vec{0} \text{ であるから, } \vec{p} + t\vec{q} \text{ と } \vec{r} \text{ が平行になるための必要十分条件は, } \vec{p} + t\vec{q} = k\vec{r} \text{ となる実数 } k \text{ が存在することである.}$$

$$\text{よって } (5 - 3t, 1 + 2t) = k(1, -1)$$

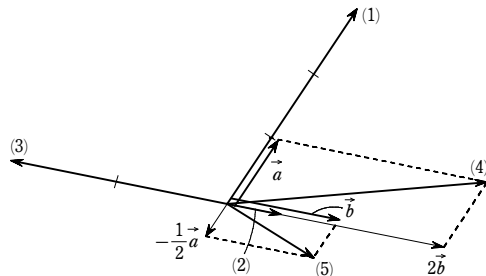
第1講 例題

第1講 例題演習

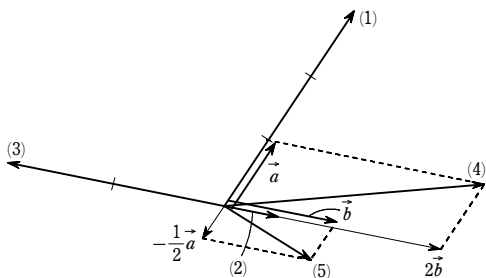
ゆえに  $5-3t=k$  ……①,  $1+2t=-k$  ……②  
 ①, ② から  $k$  を消去して  $1+2t=-(5-3t)$  これを解いて  $t=6$   
 このとき, ① から  $k=-13$  (実数) となり, 適する。  
 したがって, 求める  $t$  の値は  $t=6$   
 (2)  $|\vec{p}+i\vec{q}|^2=(5-3t)^2+(1+2t)^2=13t^2-26t+26$   
 $=13(t^2-2t)+26=13(t-1)^2+13$   
 よって,  $|\vec{p}+i\vec{q}|^2$  は  $t=1$  で最小値  $13$  をとる。  
 $|\vec{p}+i\vec{q}| \geq 0$  であるから, このとき  $|\vec{p}+i\vec{q}|$  も最小となる。  
 したがって,  $|\vec{p}+i\vec{q}|$  は  $t=1$  で最小値  $\sqrt{13}$  をとる。

1

解答



解説



2

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 左辺  $=\vec{AB}-(\vec{AD}-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AC}$   
 右辺  $=\vec{AC}-(\vec{AD}-\vec{AB})=\vec{AC}-\vec{AD}+\vec{AB}$   
 よって 左辺=右辺

別解 左辺-右辺  $=(\vec{AB}-\vec{CD})-(\vec{AC}-\vec{BD})$   
 $=(\vec{AB}+\vec{BD})-(\vec{AC}+\vec{CD})=\vec{AD}-\vec{AD}=\vec{0}$   
 よって 左辺=右辺

(2) 左辺  $=\vec{AB}+(\vec{AC}-\vec{AD})+(\vec{AF}-\vec{AE})$   
 $=\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD}+\vec{AF}-\vec{AE}$   
 右辺  $=(\vec{AB}-\vec{AD})+(\vec{AC}-\vec{AE})+\vec{AF}$   
 $=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AC}-\vec{AE}+\vec{AF}$   
 よって 左辺=右辺

別解 左辺-右辺  $=(\vec{AB}+\vec{DC}+\vec{EF})-(\vec{DB}+\vec{EC}+\vec{AF})$   
 $=(\vec{AB}-\vec{AF})+(\vec{DC}-\vec{DB})+(\vec{EF}-\vec{EC})$   
 $=\vec{FB}+\vec{BC}+\vec{CF}=\vec{FC}+\vec{CF}=\vec{FF}=\vec{0}$   
 よって 左辺=右辺

3

解答 (1) 略 (2) 略

解説

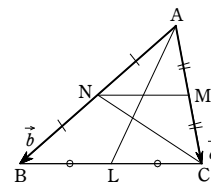
(1)  $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(2\vec{a}+\vec{b})-(6\vec{a}-3\vec{b})$   
 $=-4\vec{a}+4\vec{b}=4(\vec{b}-\vec{a})$   
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$   
 よって  $\vec{PQ}=4\vec{AB}$   
 ゆえに  $\vec{PQ} \parallel \vec{AB}$   
 (2)  $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$   
 $=(3\vec{u}-5\vec{v})-(\vec{u}-3\vec{v})=2(\vec{u}-\vec{v})$  ……①  
 $\vec{PR}=\vec{OR}-\vec{OP}$   
 $=-2\vec{v}-(\vec{u}-3\vec{v})=-(\vec{u}-\vec{v})$  ……②  
 ①, ② から  $\vec{PQ}=-2\vec{PR}$   
 したがって, 3点 P, Q, R は一直線上にある。

4

解答 (1)  $\vec{c}-\vec{b}$  (2)  $\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$  (3)  $\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$  (4)  $\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

解説

(1)  $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{c}-\vec{b}$   
 (2)  $\vec{AL}=\vec{AB}+\vec{BL}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$   
 $=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$   
 (3)  $\vec{CN}=\vec{AN}-\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$   
 (4)  $\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$



5

解答  $\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$ ,  $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

解説

対角線 AD, BE, CF の交点を O とすると  $\vec{u}=\vec{AD}=2\vec{AO}$   
 $\vec{AO}=\vec{AB}+\vec{BO}=\vec{a}+\vec{b}$  であるから  $\vec{u}=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$   
 また  $\vec{v}=\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$   
 よって  $2\vec{a}+2\vec{b}=\vec{u}$  ……①,  $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{v}$  ……②  
 ①-② から  $\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$   
 ①-②×2 から  $-2\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}$  よって  $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

6

解答 (1) ① (3, 9),  $3\sqrt{10}$  ② (-3, 2),  $\sqrt{13}$  ③ (15, 1),  $\sqrt{226}$   
 ④ (11, -22),  $11\sqrt{5}$   
 (2) ① (12, 5), 13 ② (10, 5),  $5\sqrt{5}$  ③ (-8, -1),  $\sqrt{65}$   
 ④ (-2, 0), 2

解説

(1) ①  $3\vec{a}=3(1, 3)=(3, 9)$

$$|3\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$(2) \quad -\vec{b} = -(3, -2) = (-3, 2)$$

$$|-\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$(3) \quad 3\vec{a} + 4\vec{b} = 3(1, 3) + 4(3, -2) = (3, 9) + (12, -8) \\ = (3+12, 9-8) = (15, 1)$$

$$|3\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{15^2 + 1^2} = \sqrt{226}$$

$$(4) \quad 5\vec{b} - 4\vec{a} = 5(3, -2) - 4(1, 3) = (15, -10) - (4, 12) \\ = (15-4, -10-12) = (11, -22)$$

$$|5\vec{b} - 4\vec{a}| = \sqrt{11^2 + (-22)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$(2) \quad (1) \quad \vec{OB} = (12, 5)$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$(2) \quad \vec{AB} = (12-2, 5-0) = (10, 5)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

$$(3) \quad \vec{BC} = (4-12, 4-5) = (-8, -1)$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$

$$(4) \quad \vec{AO} = (0-2, 0-0) = (-2, 0)$$

$$|\vec{AO}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

7

$$\text{解答} \quad (1) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad (2) \quad (-4, 2\sqrt{5})$$

解説

(1)  $\vec{a} = (1, 2)$  と同じ向き単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}(1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(2)  $\vec{b} = (2, -\sqrt{5})$  と反対向きで、大きさが6のベクトルは

$$-\frac{6\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{6}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2}}(2, -\sqrt{5}) = (-4, 2\sqrt{5})$$

8

$$\text{解答} \quad (1) \quad \vec{p} = 2\vec{a} + 5\vec{b} \quad (2) \quad \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

解説

(1)  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと

$$(1, -4) = s(-2, 3) + t(1, -2) = (-2s+t, 3s-2t)$$

$$\text{よって} \quad -2s+t=1, \quad 3s-2t=-4$$

$$\text{これを解いて} \quad s=2, \quad t=5$$

$$\text{したがって} \quad \vec{p} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$$

(2)  $\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと

$$(0, -1) = s(-2, 3) + t(1, -2) \\ = (-2s+t, 3s-2t)$$

$$\text{よって} \quad -2s+t=0, \quad 3s-2t=-1$$

$$\text{これを解いて} \quad s=1, \quad t=2$$

$$\text{したがって} \quad \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

9

$$\text{解答} \quad (1) \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad (1) \quad t = -1 \pm \sqrt{2} \quad (2) \quad t = -1 \text{ のとき最小値 } \sqrt{5}$$

解説

$$(1) \quad \vec{a} + 3\vec{b} = (x, -1) + 3(2, -3) = (x+6, -1-9) = (x+6, -10)$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (2, -3) - (x, -1) = (2-x, -3+1) = (2-x, -2)$$

$\vec{a} + 3\vec{b}$  と  $\vec{b} - \vec{a}$  が平行になるとき、 $\vec{a} + 3\vec{b} = k(\vec{b} - \vec{a})$  ( $k$  は実数) と表されるから  
 $(x+6, -10) = k(2-x, -2)$

$$\text{よって} \quad x+6 = k(2-x) \dots\dots ①, \quad -10 = -2k \dots\dots ②$$

$$② \text{ から} \quad k=5 \quad \text{これを} ① \text{ に代入して} \quad x+6 = 5(2-x)$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad (1) \quad \vec{c} = (3, 1) + t(1, 2) = (3+t, 1+2t)$$

$$\text{よって} \quad |\vec{c}|^2 = (3+t)^2 + (1+2t)^2 = 5t^2 + 10t + 10$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{15} \quad \text{すなわち} \quad |\vec{c}|^2 = 15 \text{ のとき} \quad 5t^2 + 10t + 10 = 15$$

$$\text{ゆえに} \quad t^2 + 2t - 1 = 0 \quad \text{したがって} \quad t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$(2) \quad (1) \text{ から} \quad |\vec{c}|^2 = 5(t+1)^2 + 5$$

よって、 $t = -1$  のとき  $|\vec{c}|^2$  は最小値 5 をとる。

$|\vec{c}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{c}|$  も最小になる。

したがって、 $|\vec{c}|$  は、 $t = -1$  のとき最小値  $\sqrt{5}$  をとる。

1

$$\text{解答} \quad \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{EF} = -\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{CE} = -\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}, \\ \vec{QP} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

解説

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

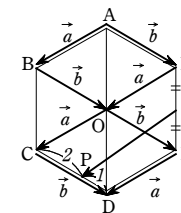
$$\vec{EF} = \vec{EO} + \vec{OF} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{CE} = \vec{CO} + \vec{OE} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{QP} = \vec{QE} + \vec{ED} + \vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \\ = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$



2

$$\text{解答} \quad (1) \quad \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \quad \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f} \quad (2) \quad \vec{BG} = \frac{4}{5}(5\vec{e} - 3\vec{f})$$

解説

$$(1) \quad \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

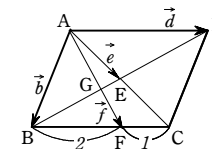
$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$$

$$\text{よって} \quad \vec{e} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}, \quad \vec{f} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$$

$$\text{これを解いて} \quad \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \quad \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$$

$$(2) \quad \text{AD} \parallel \text{BC} \text{ であるから} \quad \text{BG} : \text{DG} = \text{BF} : \text{DA} = 2 : 3$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{BG} = \frac{2}{5}\vec{BD} = \frac{2}{5}(\vec{AD} - \vec{AB}) \\ = \frac{2}{5}\{(6\vec{e} - 3\vec{f}) - (-4\vec{e} + 3\vec{f})\} \\ = \frac{4}{5}(5\vec{e} - 3\vec{f})$$



3

$$\text{解答} \quad a = 1 - \sqrt{2}$$

解説

$$\vec{CA} = (a-1, a), \quad \vec{DB} = (2, a+1) \quad \text{よって} \quad \vec{CA} \neq \vec{0}, \quad \vec{DB} \neq \vec{0}$$

$\vec{CA}$  と  $\vec{DB}$  が平行であるための条件は

$$\vec{CA} = k\vec{DB} \quad \dots\dots ①$$

となる実数  $k$  が存在することである。

$$① \text{ から} \quad (a-1, a) = k(2, a+1)$$

$$\text{よって} \quad a-1 = 2k \quad \dots\dots ②, \quad a = k(a+1) \quad \dots\dots ③$$

$$② \text{ から} \quad k = \frac{a-1}{2} \quad \dots\dots ④$$

$$\text{これを} ③ \text{ に代入して} \quad a = \frac{a-1}{2}(a+1)$$

$$\text{整理すると} \quad a^2 - 2a - 1 = 0 \quad \text{これを解くと} \quad a = 1 \pm \sqrt{2}$$

第1講 レベルA

$a < 0$  から  $a = 1 - \sqrt{2}$

このとき、④ から  $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (実数) となり、適する。

したがって  $a = 1 - \sqrt{2}$

別解  $\vec{CA} = (a-1, a)$ ,  $\vec{DB} = (2, a+1)$  であるから、 $\vec{CA}$  と  $\vec{DB}$  が平行であるための条件は  $(a-1) \cdot (a+1) - a \cdot 2 = 0$

整理すると  $a^2 - 2a - 1 = 0$  これを解くと  $a = 1 \pm \sqrt{2}$

$a < 0$  から  $a = 1 - \sqrt{2}$

4

解答 (1)  $a=2, b=1; \sqrt{34}, \sqrt{5}$  (2)  $E(4, 6), 7\sqrt{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分

条件は  $\vec{AB} = \vec{DC}$

$\vec{AB} = (a+3, 3)$ ,  $\vec{DC} = (5, 4-b)$  であるから

$a+3=5, 3=4-b$

これを解いて  $a=2, b=1$

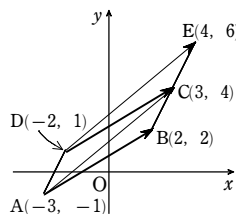
平行四辺形 ABCD の隣り合う 2 辺の長さは

$|\vec{AB}|, |\vec{AD}|$  である。

$\vec{AB} = (5, 3)$ ,  $\vec{AD} = (1, 2)$  であるから

$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{AD}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



(2) 四角形 ACED が平行四辺形であるための必要十分条件は  $\vec{AC} = \vec{DE}$

$\vec{AC} = (6, 5)$  であり、 $E(x, y)$  とすると  $\vec{DE} = (x+2, y-1)$

よって  $6=x+2, 5=y-1$  ゆえに  $x=4, y=6$

したがって  $E(4, 6)$

このとき、 $\vec{AE} = (7, 7)$  であるから、対角線 AE の長さ  $|\vec{AE}|$  は

$|\vec{AE}| = 7\sqrt{1^2 + 1^2} = 7\sqrt{2}$

5

解答 (1)  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  (2)  $t=-1, -\frac{1}{5}$  (3)  $t=-8$

解説

(1)  $\vec{a} + \vec{b} = (-3, 4) + (1, -2) = (-2, 2)$  であるから

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

よって、 $\vec{a} + \vec{b}$  と同じ向きに単位ベクトルは

$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(2)  $t\vec{a} + \vec{b} = t(1, 2) + (1, 1) = (t+1, 2t+1)$

$|t\vec{a} + \vec{b}| = 1$  となるための条件は  $|t\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1$

よって  $(t+1)^2 + (2t+1)^2 = 1$  すなわち  $5t^2 + 6t + 1 = 0$

ゆえに  $(t+1)(5t+1) = 0$  したがって  $t = -1, -\frac{1}{5}$

(3)  $\vec{a} - \vec{c} = (-6, 4-t)$ ,  $\vec{b} - \vec{c} = (6, -(t+5))$

$|\vec{a} - \vec{c}| = 2|\vec{b} - \vec{c}|$  であるから  $|\vec{a} - \vec{c}|^2 = 4|\vec{b} - \vec{c}|^2$

ゆえに  $(-6)^2 + (4-t)^2 = 4\{6^2 + (t+5)^2\}$

よって  $t^2 + 16t + 64 = 0$  ゆえに  $(t+8)^2 = 0$

よって  $t = -8$

第1講 レベルB

1

解答 平行四辺形

解説

$2\vec{BP} = \vec{BC}$  から  $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$  …… ①

$2\vec{AQ} + \vec{AB} = \vec{AC}$  から  $2\vec{AQ} = \vec{AC} - \vec{AB}$

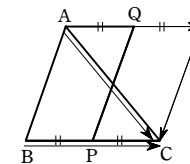
よって  $2\vec{AQ} = \vec{BC}$

ゆえに  $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$  …… ②

①, ② から  $\vec{BP} = \vec{AQ}$

よって  $BP \parallel AQ, BP = AQ$

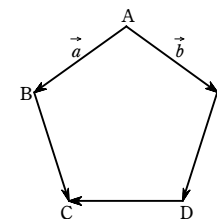
したがって、四角形 ABPQ は平行四辺形である。



2

(1)  $\triangle ABC$  において、辺 BC 上に点 D を、辺 AC 上に点 E をとり、 $BD : DC = 1 : 2$ ,  $AE : EC = 1 : 2$  とする。BE と AD の交点を P とするとき、 $\vec{AP}$  を  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  で表せ。

(2) 正五角形 ABCDE において、 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AE} = \vec{b}$  とおくとき、3つのベクトル  $\vec{BC}, \vec{DC}, \vec{ED}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。ただし、必要ならば  $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$  を用いてもよい。



解答 (1)  $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$

(2)  $\vec{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a} + \vec{b}, \vec{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{a}-\vec{b}), \vec{ED} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}$

解説

(1)  $BD : DC = AE : EC$  であるから  $AB \parallel ED$

よって  $BP : PE = AB : DE = AC : EC = 3 : 2$

ゆえに  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BE}$  …… ①

ここで  $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \vec{AB}$

これを①に代入して

$\vec{AP} = \vec{AB} + \frac{3}{5}(\frac{1}{3}\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$

(2) 正五角形 ABCDE において、

$\angle BAE = 108^\circ$  であるから

$\angle ABE = \angle AEB = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$

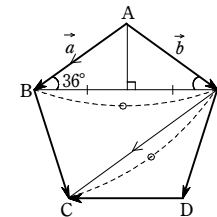
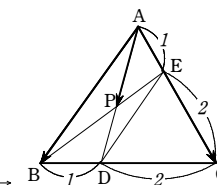
よって、 $AB = a$  とすると

$BE = 2a \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a$

ゆえに  $AB : BE = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$AB \parallel EC$  であるから

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EC} - \vec{AB}$



$$= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} - \vec{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{a} + \vec{b}$$

また、 $CD : BE = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  から  $CD = \frac{2}{1+\sqrt{5}} BE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} BE$

ゆえに  $\vec{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{EB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\vec{a} - \vec{b})$

更に  $\vec{ED} = \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BD} - \vec{AE}$   
 $= \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{b} - \vec{b} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{b}$

1

解答 (1) 3 (2) 2 (3) -2 (4) 0

解説

$$|\vec{AM}| = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

(1)  $\vec{AB}$  と  $\vec{AM}$  のなす角は  $30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{AB} \cdot \vec{AM} &= |\vec{AB}| |\vec{AM}| \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \end{aligned}$$

(2)  $\vec{AM}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $90^\circ$

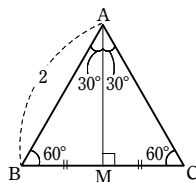
$$\text{よって } \vec{AM} \cdot \vec{BC} = |\vec{AM}| |\vec{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

(3)  $\vec{BA}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $60^\circ$

$$\text{よって } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

(4)  $\vec{AC}$  と  $\vec{CB}$  のなす角は  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\text{よって } \vec{AC} \cdot \vec{CB} = |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$



2

解答  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\sqrt{3}$ ,  $\theta = 150^\circ$

解説

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times (-1) + 1 \times (-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 150^\circ$

3

$$\text{解答 } \vec{e} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

解説

$\vec{e} = (x, y)$  とする。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \text{ すなわち } x - \sqrt{3}y = 0$$

$$\text{よって } x = \sqrt{3}y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } |\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ から } x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ から } y^2 = \frac{1}{4} \text{ したがって } y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } y = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } \vec{e} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (左辺)} &= (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{c} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - (2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (右辺)} &= (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) + 3(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (3\vec{a}) \cdot (3\vec{a}) + (3\vec{a}) \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot (3\vec{a}) + \vec{b} \cdot \vec{b} + 3(\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}) \\ &= 9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + 3(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2) \\ &= 12|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

5

解答 (1)  $\sqrt{23}$  (2)  $\sqrt{7}$

解説

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 + 2(-1) + 4^2 = 23$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{23}$$

$$\begin{aligned} (2) |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}| &= 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - \vec{b}| = 1 \text{ であるから } 1^2 = 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{3})^2 \\ \text{したがって } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{ここで } |2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \text{ であるから}$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4 \times 2^2 - 12 \times 3 + 9 \times (\sqrt{3})^2 = 7$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$$

6

解答 (ア)  $-\frac{3}{5}$  (イ)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解説

$$\triangle ABC \text{ は半径 } 1 \text{ の円 } O \text{ に内接するから } |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$$

$$5\vec{OA} + 3\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0} \text{ であるから } 5\vec{OA} + 3\vec{OB} = -4\vec{OC}$$

$$\text{よって } |5\vec{OA} + 3\vec{OB}| = |-4\vec{OC}|$$

$$\text{ここで } |5\vec{OA} + 3\vec{OB}|^2 = 25|\vec{OA}|^2 + 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 9|\vec{OB}|^2 = 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 34$$

$$|-4\vec{OC}|^2 = 16|\vec{OC}|^2 = 16$$

$$\text{よって } 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 34 = 16 \quad \text{ゆえに } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ であるから } |\vec{AB}|^2 &= |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2 \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, 辺 } AB \text{ の長さは } |\vec{AB}| = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

7

解答 24

解説

$$\vec{AB} = (-2, -10), \vec{AC} = (4, -4) \text{ であるから}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{26}, |\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times 4 + (-10) \times (-4) = 32$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{26})^2 \times (4\sqrt{2})^2 - 32^2} = 24$$

別解  $\triangle ABC = \frac{1}{2} |(-2) \times (-4) - (-10) \times 4| = 24$

1

解答 (1) 12 (2) 0 (3) -4 (4) -12

解説

$$AB = 2\sqrt{3}, BC = 2$$

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

$$(2) \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

(3)  $\overrightarrow{BC}$  と  $\overrightarrow{CA}$  のなす角は  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  であるから

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CA}| \cos 120^\circ = 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

(4)  $\overrightarrow{AC}$  と  $\overrightarrow{BA}$  のなす角は  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  であるから

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BA}| \cos 150^\circ = 4 \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -12$$

2

解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2, \theta = 60^\circ$  (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5, \theta = 135^\circ$

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times (\sqrt{3} - 1) + 1 \times (\sqrt{3} + 1) = 2$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 60^\circ$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 2 \times (-3) = -5$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 135^\circ$

3

解答  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

解説

求める単位ベクトルを  $\vec{e} = (x, y)$  とする。

$$|\vec{e}| = 1 \text{ であるから } |\vec{e}|^2 = 1 \quad \text{よって } x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } (-1) \times x + \sqrt{3} \times y = 0 \quad \text{よって } x = \sqrt{3}y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } (\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{よって } y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } y = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、 $\vec{a}$  に垂直な単位ベクトルは  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) \text{ (左辺)} = \vec{p} \cdot (\vec{p} + 2\vec{b}) - \vec{a} \cdot (\vec{p} + 2\vec{b}) \\ = \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{b} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ = |\vec{p}|^2 - (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{(右辺)}$$

よって、等式は成り立つ。

$$(2) \text{ (左辺)} = (\vec{a} - 6\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 6\vec{b}) + (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ = (|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 36|\vec{b}|^2) + (4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2) \\ = 5|\vec{a}|^2 + 45|\vec{b}|^2 = 5(|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2) = \text{(右辺)}$$

よって、等式は成り立つ。

5

解答 (1)  $3\sqrt{7}$  (2)  $\sqrt{37}$

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$\text{よって } |3\vec{a} - \vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \times 2^2 - 6 \times (-3) + 3^2 = 63$$

$$|3\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |3\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{7}$$

$$(2) |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2 \text{ であるから } 2^2 = 2^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 1^2$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\text{ゆえに } |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 \times 2^2 + 12 \times 1 + 9 \times 1^2 = 37$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{37}$$

6

解答 (1)  $-\frac{3}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

解説

$$(1) \text{ 条件から } |\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ から } \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して } (\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 1^2$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times 1^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

参考  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を求めた後に、次のようにして  $\triangle OAB$  の面積を求めることもできる。

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-\frac{3}{2}}{2 \times 1} = -\frac{3}{4}$$

$\sin \angle AOB > 0$  であるから

$$\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって  $\triangle OAB = \frac{1}{2}OA \times OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

7

【解答】 (1) 5 (2)  $\frac{19}{2}$

【解説】

(1)  $S = \frac{1}{2}|3 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

(2) 3点A(-2, 1), B(3, 0), C(2, 4)を、点Bが原点Oにくるように平行移動するとき、A, CがそれぞれA', C'に移るとすると、A'(-5, 1), C'(-1, 4)となる。このとき、 $S = \triangle A'OC'$ であるから

$$S = \frac{1}{2}|(-5) \cdot 4 - 1 \cdot (-1)| = \frac{19}{2}$$

1

【解答】  $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

【解説】

求める単位ベクトルを  $\vec{e} = (x, y)$  とすると  $x^2 + y^2 = 1 \dots \dots \textcircled{1}$

また、 $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| |\vec{e}| \cos 60^\circ$  から  $x - y = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{2}$  よって  $x - y = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  から  $x$  を消去して  $y^2 + \sqrt{2}y + \frac{1}{2} + y^2 = 1$  すなわち  $2y^2 + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} = 0$

これを解いて  $y = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$

$y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  のとき、 $\textcircled{2}$  から  $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$y = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  のとき、 $\textcircled{2}$  から  $x = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ゆえに  $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$  または  $\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

2

【解答】  $t = -1$

【解説】

$|\vec{a} + \vec{b}| = 2$  から  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4$  よって  $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2$  を代入して  $2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 4$

ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$

$\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} + t\vec{b}$  が垂直になるから  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$

よって  $|\vec{a}|^2 + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$  を代入して  $2^2 + (t+1) \times (-2) + t \times 2^2 = 0$

ゆえに  $2t + 2 = 0$  したがって  $t = -1$

3

【解答】  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値  $2\sqrt{3}$

【解説】

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{21}$  から  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 21$  よって  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 21$

$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$  を代入して  $4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 = 21$  ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

したがって  $|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 4^2 + 2t \times 10 + t^2 \times 5^2$   
 $= 25t^2 + 20t + 16 = 25\left(t + \frac{2}{5}\right)^2 + 12$

よって、 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$  は  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値 12 をとる。

$|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{a} + t\vec{b}|$  も最小になる。

したがって、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$  は  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  をとる。

4

【解答】 略

【解説】

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OC} = \vec{c}$  とすると

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c} \quad \vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

$\vec{OA} \perp \vec{OC}$  から  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

これと  $|\vec{a}| = 3, |\vec{c}| = 2$  から

$$\vec{CD} \cdot \vec{OE} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{3}{4}|\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 3^2 - \frac{3}{4} \times 0 - \frac{3}{4} \times 2^2 = 0$$

$\vec{CD} \neq \vec{0}, \vec{OE} \neq \vec{0}$  であるから  $\vec{CD} \perp \vec{OE}$  したがって  $CD \perp OE$

5

【解答】 (1) 証明は略、等号成立は  $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  または  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きが同じとき

(2) 略

【解説】

(1) [1]  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  のとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= 2(|\vec{a}||\vec{b}| - \vec{a} \cdot \vec{b}) = 2(|\vec{a}||\vec{b}| - |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$$

$$= 2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0, 1 - \cos\theta \geq 0$  であるから  $2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \geq 0$

すなわち  $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq 0$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}| + |\vec{b}| > 0, |\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

等号が成り立つのは  $1 - \cos\theta = 0$  すなわち  $\cos\theta = 1$  のときである。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから、 $\cos\theta = 1$  より  $\theta = 0^\circ$

このとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きは同じである。

[2]  $\vec{a} = \vec{0}$  のとき  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}|, |\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{b}|$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

[3]  $\vec{b} = \vec{0}$  のとき  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|, |\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}|$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

以上から、 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  が成り立つ。

等号が成り立つのは、 $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  または  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きが同じときである。

(2) (1) の不等式から  $|\vec{3\vec{a} + 4\vec{b}}| \leq |\vec{3\vec{a}}| + |\vec{4\vec{b}}|$

したがって  $|\vec{3\vec{a} + 4\vec{b}}| \leq |\vec{3\vec{a}}| + |\vec{4\vec{b}}|$

1

解答 (1)  $|\vec{a}| = \sqrt{7}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$  (2)  $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{7}}{2} \leq k$

解説

(1)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 = 4^2$  から  $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$  …… ①

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{q}|^2 = 2^2$  から  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$  …… ②

①-② から  $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$  よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

①+② から  $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 20$  ゆえに  $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 10$  …… ③

また  $\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ ,

$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

よって  $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 4$  …… ④

③, ④ から  $|\vec{a}|^2 = 7$ ,  $|\vec{b}|^2 = 3$

$|\vec{a}| \geq 0$ ,  $|\vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a}| = \sqrt{7}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

(2)  $|\vec{t}\vec{a} + k\vec{b}| \geq |\vec{b}|$  は  $|\vec{t}\vec{a} + k\vec{b}|^2 \geq |\vec{b}|^2$  …… ① と同値である。

① を変形すると  $t^2|\vec{a}|^2 + 2kt\vec{a} \cdot \vec{b} + (k^2 - 1)|\vec{b}|^2 \geq 0$

(1) から  $7t^2 + 6kt + 3(k^2 - 1) \geq 0$  …… ②

求める条件は、すべての実数  $t$  に対して②が成り立つための条件であり、 $t$  の2次方程式  $7t^2 + 6kt + 3(k^2 - 1) = 0$  の判別式を  $D$  とすると、 $t^2$  の係数が正であるから

$D \leq 0$  ゆえに  $\frac{D}{4} = (3k)^2 - 7 \times 3(k^2 - 1) \leq 0$

よって  $4k^2 - 7 \geq 0$  ゆえに  $(k + \frac{\sqrt{7}}{2})(k - \frac{\sqrt{7}}{2}) \geq 0$

したがって  $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{7}}{2} \leq k$

2

解答 (1)  $\sqrt{k^2 + 4}$  (2)  $k = -4 + 2\sqrt{3}$

解説

(1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は直交するから  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

また、 $\vec{c} + \vec{d} = 2\vec{a} + k\vec{b}$  であるから

$|\vec{c} + \vec{d}|^2 = |2\vec{a} + k\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2|\vec{b}|^2 = k^2 + 4$

$|\vec{c} + \vec{d}| \geq 0$  であるから  $|\vec{c} + \vec{d}| = \sqrt{k^2 + 4}$

(2)  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{c} + \vec{d}$  のなす角が  $60^\circ$  であるとき

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = |\vec{a} + \vec{b}||\vec{c} + \vec{d}|\cos 60^\circ$  …… ①

ここで  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + k\vec{b})$

$= 2|\vec{a}|^2 + (k+2)\vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2$   
 $= k+2$

また  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2$

$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$

ゆえに、① から  $k+2 = \sqrt{2} \times \sqrt{k^2 + 4} \times \frac{1}{2}$

すなわち  $\sqrt{2}(k+2) = \sqrt{k^2 + 4}$  …… ②

右辺の  $\sqrt{k^2 + 4}$  は正であるから  $k+2 > 0$  よって  $k > -2$  …… ③

このとき、②の両辺を2乗して整理すると  $k^2 + 8k + 4 = 0$

これを解くと  $k = -4 \pm 2\sqrt{3}$

このうち、③を満たすのは  $k = -4 + 2\sqrt{3}$

3

解答 (1)  $\theta = 120^\circ$  (2)  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1)  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$  であるから  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$

よって  $|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{a}| > 0$ ,  $|\vec{b}| > 0$  であるから  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$  …… ①

また、 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2|\vec{b}|$  から  $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 4|\vec{b}|^2$

よって  $|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4|\vec{b}|^2$  ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$  …… ②

よって  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$  ①を代入して  $2|\vec{b}|^2\cos\theta = -|\vec{b}|^2$

$|\vec{b}| > 0$  であるから  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$   $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 120^\circ$

(2)  $|\vec{a}| = 1$  のとき、①, ②から  $|\vec{b}| = \frac{1}{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$

よって  $|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|^2 = t^2|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{t^2}|\vec{b}|^2$   
 $= t^2 \times 1^2 + 2 \times (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{t^2}(\frac{1}{2})^2 = (t^2 + \frac{1}{4t^2}) - \frac{1}{2}$   
 $\geq 2\sqrt{t^2 \times \frac{1}{4t^2}} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$t > 0$  であるから、 $|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|^2$  は  $t^2 = \frac{1}{4t^2}$  すなわち  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{2}$  ととる。

$|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|$  も最小となる。

ゆえに、 $|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|$  は  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ととる。

4

解答  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

解説

$(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} + 3t\vec{b})$  であるから  $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3t\vec{b}) = 0$

よって  $3|\vec{b}|^2 t^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} t + |\vec{a}|^2 = 0$  …… ①

$|\vec{b}| \neq 0$  であるから、 $(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} + 3t\vec{b})$  であるような実数  $t$  がただ1つ存在するための条件は、 $t$  についての2次方程式①の判別式を  $D$  とすると  $D = 0$

ここで  $\frac{D}{4} = (2\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 3|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta - 3)$

よって、 $D = 0$  から  $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta - 3) = 0$

$|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$  であるから、 $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$  より  $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

1

解答 (1)  $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$  (2)  $\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

解説

(1)  $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

(2)  $\frac{-3\vec{a} + \vec{b}}{1-3} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

2

解答 (1) 辺 BC を 3 : 4 に内分する点を D とすると、線分 AD を 7 : 5 に内分する点 P (2) 5 : 4 : 3

解説

(1)  $\vec{AB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c}$ ,  $\vec{AP} = \vec{p}$  とする。

等式から  $5\vec{AP} + 4(\vec{AP} - \vec{AB}) + 3(\vec{AP} - \vec{AC}) = \vec{0}$

よって  $5\vec{p} + 4(\vec{p} - \vec{b}) + 3(\vec{p} - \vec{c}) = \vec{0}$

ゆえに  $\vec{p} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{12} = \frac{7}{12} \times \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{7} = \frac{7}{12} \times \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{3+4}$

したがって、辺 BC を 3 : 4 に内分する点を D とすると、点 P は線分 AD を 7 : 5 に内分する点である。

(2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

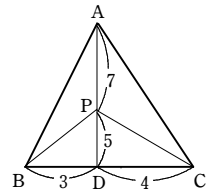
$\triangle PBC = \frac{5}{12}S$

$\triangle PCA = \frac{7}{12}\triangle ADC = \frac{7}{12} \times \frac{4}{7}S = \frac{1}{3}S$

$\triangle PAB = \frac{7}{12}\triangle ABD = \frac{7}{12} \times \frac{3}{7}S = \frac{1}{4}S$

よって

$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{5}{12}S : \frac{1}{3}S : \frac{1}{4}S = 5 : 4 : 3$



3

解答 証明略, 19 : 6

解説

$\vec{DA} = \vec{a}$ ,  $\vec{DC} = \vec{c}$  とすると  $\vec{DL} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{c}}{5}$  …… ①

$\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}$  であるから

$\vec{DN} = \frac{15\vec{DM} + 4\vec{DC}}{19} = \frac{15(\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}) + 4\vec{c}}{19}$

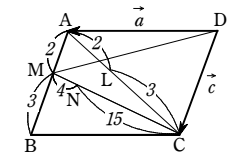
$= \frac{15\vec{a} + 10\vec{c}}{19} = \frac{5}{19}(3\vec{a} + 2\vec{c})$  …… ②

①, ② から  $\vec{DN} = \frac{25}{19}\vec{DL}$

したがって、3点 D, L, N は一直線上にあり、DL : LN = 19 : 6

4

解答 (1)  $\vec{AP} = \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}$  (2)  $\vec{AQ} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$



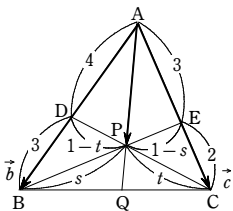
第3講 例題

【解説】

(1)  $BP : PE = s : (1-s)$ ,  $CP : PD = t : (1-t)$  とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE} \\ &= (1-s)\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{4}{7}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$



①, ② から  $(1-s)\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} = \frac{4}{7}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は平行でないから  $1-s = \frac{4}{7}t$ ,  $\frac{3}{5}s = 1-t$

よって  $7s+4t=7$ ,  $3s+5t=5$  これを解いて  $s = \frac{15}{23}$ ,  $t = \frac{14}{23}$

$s = \frac{15}{23}$  を①に代入して  $\overrightarrow{AP} = \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}$

(2)  $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$  ( $k$  は実数) とすると

$$\overrightarrow{AQ} = k\left(\frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}\right) = \frac{8}{23}k\vec{b} + \frac{9}{23}k\vec{c} \quad \dots\dots ③$$

$BQ : QC = u : (1-u)$  とすると  $\overrightarrow{AQ} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c} \quad \dots\dots ④$

③, ④ から  $\frac{8}{23}k\vec{b} + \frac{9}{23}k\vec{c} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c}$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は平行でないから  $\frac{8}{23}k = 1-u$ ,  $\frac{9}{23}k = u$

これを解いて  $k = \frac{23}{17}$ ,  $u = \frac{9}{17}$

$u = \frac{9}{17}$  を④に代入して  $\overrightarrow{AQ} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$

【参考1】 後の項目「ベクトル方程式」で次のことを学習する。

点  $P(\vec{p})$  が 2 点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を通る直線上にある

$$\iff \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s+t=1$$

このことを利用すると, ③ から直ちに  $k$  の値を求めることができる。

(別解) 点  $Q$  は辺  $BC$  上にあるから, ③ より

$$\frac{8}{23}k + \frac{9}{23}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{23}{17}$$

【参考2】 (1) の  $\overrightarrow{AP}$  を求めるのにメネラウスの定理, (2) の  $\overrightarrow{AQ}$  を求めるのにチェバの定理を利用してよい。

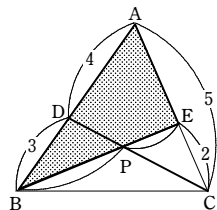
(1)  $\triangle ABE$  と直線  $CD$  について, メネラウスの定理から

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$$

すなわち  $\frac{BP}{PE} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = 1$

よって,  $BP : PE = 15 : 8$  であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{8\overrightarrow{AB} + 15\overrightarrow{AE}}{15+8} = \frac{1}{23}\left(8\vec{b} + 15 \times \frac{3}{5}\vec{c}\right) \\ &= \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c} \end{aligned}$$



(2) チェバの定理から  $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$

すなわち  $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 1$

よって,  $BQ : QC = 9 : 8$  であるから

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{8\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}}{9+8} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$$

【5】

【解答】  $\overrightarrow{OH} = \frac{5}{24}\vec{a} + \frac{19}{144}\vec{b}$

【解説】

余弦定理から  $\cos \angle AOB = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \angle AOB = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{5} = 6$

$H$  は垂心であるから  $OH \perp AB$ ,  $AH \perp OB$

$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$  ( $s, t$  は実数) とする。

$OH \perp AB$  より  $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  であるから

$$(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

よって  $-s|\vec{a}|^2 + (s-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに  $-25s + 6(s-t) + 36t = 0$

すなわち  $-19s + 30t = 0 \quad \dots\dots ①$

また,  $AH \perp OB$  より  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  であるから

$$\{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0$$

よって  $(s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに  $6(s-1) + 36t = 0$  すなわち  $s+6t=1 \quad \dots\dots ②$

①, ② から  $s = \frac{5}{24}$ ,  $t = \frac{19}{144}$

したがって  $\overrightarrow{OH} = \frac{5}{24}\vec{a} + \frac{19}{144}\vec{b}$

【6】

【解答】  $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

【解説】

条件から  $|\vec{b}|=3$ ,  $|\vec{c}|=2$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \times 2 \cos 60^\circ = 3$

$\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c}$  ( $s, t$  は実数) とおく。

辺  $AB$  の中点を  $M$  とすると, 点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心であるから

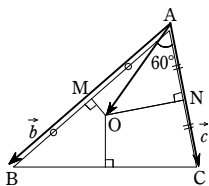
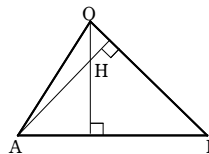
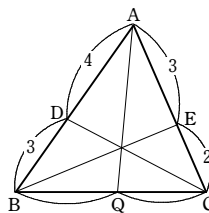
$OM \perp AB$  よって  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{b} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = \left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b} - t\vec{c}$$

であるから

$$\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b} - t\vec{c}\right\} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2 - t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

これに  $|\vec{b}|=3$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}=3$  を代入して整理すると  $6s+2t=3 \quad \dots\dots ①$



辺  $AC$  の中点を  $N$  とすると, 点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心であるから  $ON \perp AC$

よって  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{c} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = -s\vec{b} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}$$

であるから

$$\left\{-s\vec{b} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -s\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

これに  $\vec{b} \cdot \vec{c}=3$ ,  $|\vec{c}|=2$  を代入して整理すると  $3s+4t=2 \quad \dots\dots ②$

①, ② を解いて  $s = \frac{4}{9}$ ,  $t = \frac{1}{6}$

したがって  $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1)  $\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$  (2)  $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$  (3)  $4\vec{a}-3\vec{b}$  (4)  $\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

【解説】

(1)  $\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5} = \frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$  (2)  $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$   
 (3)  $\frac{-4\vec{a}+3\vec{b}}{3-4} = 4\vec{a}-3\vec{b}$  (4)  $\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1} = \frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

2

【解答】 (1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を Q とすると、線分 AQ を 5:6 に内分する点  
 (2) 6:3:2

【解説】

(1) 与えられた等式から  $6\vec{AP}+3(\vec{AP}-\vec{AB})+2(\vec{AP}-\vec{AC})=\vec{0}$

よって  $11\vec{AP}=3\vec{AB}+2\vec{AC}$   
 ゆえに  $\vec{AP}=\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{11}=\frac{5}{11}\times\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{5}$   
 $\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{5}=\vec{AQ}$  とおくと  $\vec{AP}=\frac{5}{11}\vec{AQ}$

よって BQ:QC=2:3, AP:PQ=5:6  
 したがって、辺 BC を 2:3 に内分する点を Q とすると、点 P は線分 AQ を 5:6 に内分する点である。

(2)  $\triangle PBQ:\triangle PCQ=BQ:QC=2:3$

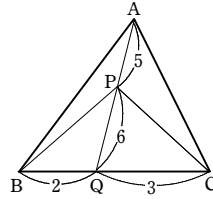
よって、 $\triangle PBQ=2S$  とすると  $\triangle PCQ=3S$

ゆえに  $\triangle PBC=2S+3S=5S$

$\triangle PCQ:\triangle PCA=6:5$  であるから  $\triangle PCA=\frac{5}{6}\times 3S=\frac{5}{2}S$

$\triangle PBQ:\triangle PAB=6:5$  であるから  $\triangle PAB=\frac{5}{6}\times 2S=\frac{5}{3}S$

したがって  $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=5S:\frac{5}{2}S:\frac{5}{3}S=6:3:2$



3

【解答】 (1) 証明略, 1:4 (2) 略

【解説】

(1)  $\vec{AB}=\vec{b}, \vec{AC}=\vec{c}$  とすると

$\vec{AP}=\frac{-\vec{AB}+2\vec{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

$\vec{AQ}=\frac{1}{3}\vec{AB}=\frac{1}{3}\vec{b}$

$\vec{AR}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

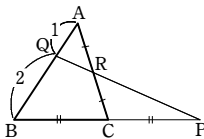
よって  $\vec{QR}=\vec{AR}-\vec{AQ}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{4}{3}\vec{b}+2\vec{c}=4\left(-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

ゆえに  $\vec{QP}=4\vec{QR}$

したがって、3点 P, Q, R は一直線上にある。

また QR:QP=1:4



(2)  $\vec{CB}=\vec{b}, \vec{CD}=\vec{d}$  とすると

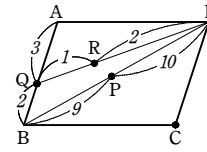
$\vec{CP}=\frac{10\vec{b}+9\vec{d}}{19}$  ..... ①

$\vec{CQ}=\vec{CB}+\vec{BQ}=\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$  であるから

$\vec{CR}=\frac{2\vec{CQ}+\vec{CD}}{3}=\frac{2\left(\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}\right)+\vec{d}}{3}$   
 $=\frac{10\vec{b}+9\vec{d}}{15}$  ..... ②

①, ② から  $\vec{CR}=\frac{19}{15}\vec{CP}$

よって、3点 C, P, R は一直線上にある。



4

【解答】 (1)  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$  (2)  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

【解説】

(1) AP:PD=s:(1-s), BP:PC=t:(1-t) とすると

$\vec{OP}=(1-s)\vec{OA}+s\vec{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}$ ,

$\vec{OP}=t\vec{OC}+(1-t)\vec{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって  $(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$  であるから  $1-s=\frac{3}{5}t, \frac{3}{7}s=1-t$

これを解いて  $s=\frac{7}{13}, t=\frac{10}{13}$  したがって  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2) AQ:QB=u:(1-u) とすると  $\vec{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

また、点 Q は直線 OP 上にあるから、 $\vec{OQ}=k\vec{OP}$

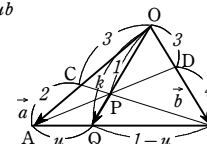
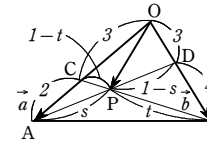
(k は実数) とすると、(1) の結果から

$\vec{OQ}=k\left(\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\right)=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

よって  $(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$  であるから  $1-u=\frac{6}{13}k, u=\frac{3}{13}k$

これを解いて  $k=\frac{13}{9}, u=\frac{1}{3}$  したがって  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$



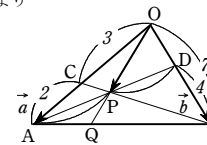
【別解】 チェバ・メネラウスの定理の利用

(1)  $\triangle OAD$  と直線 BC について、メネラウスの定理により

$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BO}=1$  よって  $\frac{3}{2}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{4}{7}=1$

ゆえに  $\frac{AP}{PD}=\frac{7}{6}$  すなわち AP:PD=7:6

よって  $\vec{OP}=\frac{6\vec{OA}+7\vec{OD}}{7+6}=\frac{1}{13}\left(6\vec{a}+7\cdot\frac{3}{7}\vec{b}\right)$   
 $=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

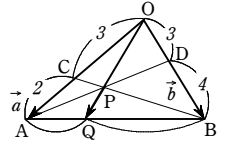


(2)  $\triangle OAB$  において、チェバの定理により

$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BD}{DO}=1$  よって  $\frac{3}{2}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{4}{3}=1$

ゆえに  $\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}$  すなわち AQ:QB=1:2

よって  $\vec{OQ}=\frac{2\vec{OA}+\vec{OB}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$



【別解】 直線のベクトル方程式の利用

(1)  $\vec{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$  (x, y は実数) とする。

$\vec{b}=\frac{7}{3}\vec{OD}$  より  $\vec{OP}=x\vec{a}+y\cdot\frac{7}{3}\vec{OD}=x\vec{OA}+\frac{7}{3}y\vec{OD}$

点 P は直線 AD 上にあるから  $x+\frac{7}{3}y=1$  ..... ①

$\vec{a}=\frac{5}{3}\vec{OC}$  より  $\vec{OP}=x\cdot\frac{5}{3}\vec{OC}+y\vec{b}=\frac{5}{3}x\vec{OC}+y\vec{OB}$

点 P は直線 BC 上にあるから  $\frac{5}{3}x+y=1$  ..... ②

①, ② を解いて  $x=\frac{6}{13}, y=\frac{3}{13}$  よって  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2)  $\vec{OQ}=k\vec{OP}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$  (k は実数) とおくと、点 Q は直線 AB 上にあるから

$\frac{6}{13}k+\frac{3}{13}k=1$  よって  $k=\frac{13}{9}$

ゆえに  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

5

【解答】  $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=10, \vec{OH}=\frac{1}{7}\vec{OA}+\frac{3}{35}\vec{OB}$

【解説】

$|\vec{AB}|=12$  から  $|\vec{OB}-\vec{OA}|=12$

両辺を 2 乗すると  $|\vec{OB}|^2-2\vec{OB}\cdot\vec{OA}+|\vec{OA}|^2=144$

よって  $10^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+8^2=144$  ゆえに  $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=10$

$\vec{OH}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$  とおく。

$\vec{OH}\perp\vec{AB}$  であるから  $\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0$

よって  $(s\vec{OA}+t\vec{OB})\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})=0$

すなわち

$s\vec{OA}\cdot\vec{OB}-s|\vec{OA}|^2+t|\vec{OB}|^2-t\vec{OB}\cdot\vec{OA}=0$

ゆえに  $10s-8^2s+10^2t-10t=0$

すなわち  $-3s+5t=0$  ..... ①

$\vec{AH}\perp\vec{OB}$  であるから  $\vec{AH}\cdot\vec{OB}=0$  よって  $(\vec{OH}-\vec{OA})\cdot\vec{OB}=0$

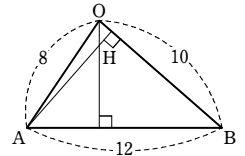
ゆえに  $(s\vec{OA}+t\vec{OB}-\vec{OA})\cdot\vec{OB}=0$

すなわち  $s\vec{OA}\cdot\vec{OB}+t|\vec{OB}|^2-\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$

ゆえに  $10s+10^2t-10=0$

すなわち  $s+10t=1$  ..... ②

①, ② を解いて  $s=\frac{1}{7}, t=\frac{3}{35}$  したがって  $\vec{OH}=\frac{1}{7}\vec{OA}+\frac{3}{35}\vec{OB}$



6

解答  $\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$

解説

$\vec{AO} = \vec{x}$  とする.  $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$  であるから

$\vec{x} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$  と表される.

条件から  $|\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$

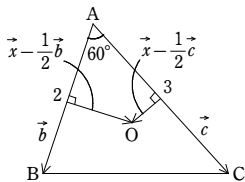
外心 O は各辺の垂直二等分線の交点であるから

$(\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0, (\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$  よって

$\left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \beta\vec{c} \right\} \cdot \vec{b} = 0, \left\{ \alpha\vec{b} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{c} \right\} \cdot \vec{c} = 0$

ゆえに  $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + \beta \cdot 3 = 0, \alpha \cdot 3 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \cdot 9 = 0$  から

$4\alpha + 3\beta = 2, 3\alpha + 9\beta = \frac{9}{2}$  これを解いて  $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{4}{9}$  よって  $\vec{AO} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$



1

解答 (1) 略 (2) 略

解説

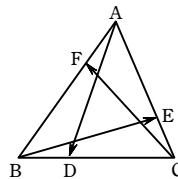
(1)  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると

$\vec{AD} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{1+3} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4}$

$\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}$

$\vec{CF} = \vec{AF} - \vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}$

したがって  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4} + \left(\frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}\right) + \left(\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right)$   
 $= \frac{(3\vec{b} + \vec{c}) + (3\vec{c} - 4\vec{b}) + (\vec{b} - 4\vec{c})}{4} = \vec{0}$



(2)  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると, 条件から

$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{b}, \vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{c}$

線分 BE を 5 : 6 に内分する点を Q とすると

$\vec{AQ} = \frac{6\vec{AB} + 5\vec{AE}}{5+6} = \frac{1}{11}(6\vec{b} + 5 \times \frac{2}{5}\vec{c}) = \frac{2}{11}(3\vec{b} + \vec{c})$

線分 CD を 9 : 2 に内分する点を R とすると

$\vec{AR} = \frac{2\vec{AC} + 9\vec{AD}}{9+2} = \frac{1}{11}(2\vec{c} + 9 \times \frac{2}{3}\vec{b}) = \frac{2}{11}(3\vec{b} + \vec{c})$

よって  $\vec{AQ} = \vec{AR}$

したがって, Q, R は同じ点である.

2

解答  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

解説

$\vec{OH} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$  ( $0 < t < 1$ ) とおける.

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{b}-\vec{a}|=4$

ここで  $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 4^2$

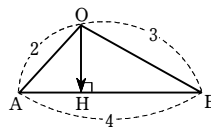
すなわち  $|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 16$

よって  $3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 16$

したがって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$

$\vec{OH} \perp \vec{AB}$  であるから  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$

ここで  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \vec{OH} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$   
 $= -t\vec{a} \cdot \vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdot \vec{b} + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $= -t|\vec{a}|^2 + (1-t)|\vec{b}|^2 + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $= -4t + 9(1-t) - \frac{3}{2}(2t-1)$   
 $= \frac{21}{2} - 16t$



よって  $\frac{21}{2} - 16t = 0$

したがって  $t = \frac{21}{32}$

ゆえに  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

別解 AH = x とおくと  $2^2 - x^2 = 3^2 - (4-x)^2$   
 $4 - x^2 = -7 + 8x - x^2$

よって  $x = \frac{11}{8}$

したがって AH : HB =  $\frac{11}{8} : \left(4 - \frac{11}{8}\right) = 11 : 21$

ゆえに  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

3

解答 (ア)  $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$  (イ)  $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{c}$

解説

$\vec{OE} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ,

$\vec{OF} = \vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}$

よって  $\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \left(\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) - \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$   
 $= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

G は線分 EF 上にあるから,  $\vec{EG} = k\vec{EF}$  となる実数 k がある.

ゆえに  $\vec{EG} = -\frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c}$

したがって  $\vec{OG} = \vec{OE} + \vec{EG} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \left(-\frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c}\right)$   
 $= \left(-\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}(k+1)\vec{c}$  …… ①

また, G は線分 OB 上にあるから,  $\vec{OG} = l\vec{OB}$  となる実数 l がある.

$\vec{OB} = \vec{a} + \vec{c}$  であるから  $\vec{OG} = l(\vec{a} + \vec{c}) = l\vec{a} + l\vec{c}$  …… ②

①, ② から  $\left(-\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}(k+1)\vec{c} = l\vec{a} + l\vec{c}$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{a}, \vec{c}$  は平行でないから

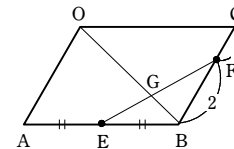
$-\frac{2}{3}k + 1 = l, \frac{1}{2}(k+1) = l$  これを解くと  $k = \frac{3}{7}, l = \frac{5}{7}$

よって  $\vec{OG} = \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{c}$

4

解答  $r = \frac{7}{15}$

解説



BR : RQ = s : (1-s), CR : RP = t : (1-t) とすると

$$\begin{aligned} \vec{AR} &= (1-s)\vec{AB} + s\vec{AQ} \\ &= (1-s)\vec{AB} + \frac{2}{3}s\vec{AC} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AR} &= t\vec{AP} + (1-t)\vec{AC} \\ &= \frac{t}{3}\vec{AB} + (1-t)\vec{AC} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$\vec{AB} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{AC} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{AB} \not\parallel \vec{AC}$  であるから, ①, ②により

$$1-s = \frac{t}{3}, \quad \frac{2}{3}s = 1-t$$

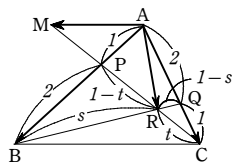
これを解いて  $s = \frac{6}{7}, t = \frac{3}{7}$  よって  $\vec{AR} = \frac{1}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \vec{AM} &= \frac{-r\vec{AR} + \vec{AP}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \left\{ -r \left( \frac{1}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC} \right) + \frac{1}{3}\vec{AB} \right\} \\ &= \frac{1}{1-r} \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{r}{7} \right) \vec{AB} - \frac{4}{7}r\vec{AC} \right\} \end{aligned}$$

また  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

よって,  $\vec{AM}$  と  $\vec{BC}$  が平行になるための条件は  $\frac{1}{3} - \frac{r}{7} = \frac{4}{7}r$

これを解いて  $r = \frac{7}{15}$  ( $0 < r < 1$  を満たす)



1

【解答】 (1)  $\vec{OE} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$  (2)  $s = \frac{3}{8}$

【解説】

(1) OC : CB = 3 : 2 であるから  $\vec{OC} = \frac{3}{5}\vec{OB} = \frac{3}{5}\vec{b}$

AD : DB = s : (1-s) であるから  $\vec{OD} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$

OE : OD = t : 1 ( $0 < t < 1$ ) とおくと

$$\vec{OE} = t\vec{OD} = t(1-s)\vec{a} + ts\vec{b}$$

AE : EC = u : (1-u) ( $0 < u < 1$ ) とおくと

$$\vec{OE} = (1-u)\vec{OA} + u\vec{OC} = (1-u)\vec{a} + \frac{3}{5}u\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であり,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから

$$t(1-s) = 1-u, \quad ts = \frac{3}{5}u$$

これを解くと  $t = \frac{3}{2s+3}, u = \frac{5s}{2s+3}$

よって  $\vec{OE} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$

(2)  $\triangle OAE$  と  $\triangle OCE$  の面積が等しくなるための条件は, E が線分 AC の中点になることである。すなわち,  $u = \frac{1}{2}$  となることであるから, (1) より

$$\frac{5s}{2s+3} = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 10s = 2s+3$$

これを解いて  $s = \frac{3}{8}$

【別解】 (1)  $\triangle ABC$  と直線 OD についてメネラウスの定理により

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CO}{OB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{AE}{EC} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1-s}{s} = 1$$

よって  $\frac{AE}{EC} = \frac{5s}{3(1-s)}$  ゆえに AE : EC = 5s : 3(1-s)

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \frac{3(1-s)}{5s+3(1-s)}\vec{OA} + \frac{5s}{5s+3(1-s)}\vec{OC} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{5s}{2s+3} \times \frac{3}{5}\vec{b} \\ &= \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b} \end{aligned}$$

2

【解答】 略

【解説】

$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$  から

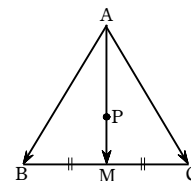
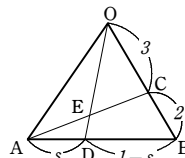
$$-\vec{AP} + (\vec{AB} - \vec{AP}) + (\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$$

よって  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$

ゆえに, P は  $\triangle ABC$  の重心であるから, AP は  $\triangle ABC$  の中線で, AP の延長と辺 BC の交点を M とすると

$$BM = CM \quad \dots\dots ①$$

また, P は  $\triangle ABC$  の内心であるから, AP は  $\angle A$  の二等分線である。



よって AB : AC = BM : MC  $\dots\dots ②$

①, ②から AB = AC

以上は点 A を始点と考えたが, B を始点として同様に考えると BA = BC したがって,  $\triangle ABC$  は正三角形である。

3

【解答】 (1) 略 (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = -15, \vec{c} \cdot \vec{a} = -20$  (3)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解説】

(1)  $\vec{OG} = \vec{g}$  とする。

$$4\vec{AG} + 3\vec{BG} + 5\vec{CG} = 12\vec{OG} \text{ を変形すると } 4(\vec{g} - \vec{a}) + 3(\vec{g} - \vec{b}) + 5(\vec{g} - \vec{c}) = 12\vec{g}$$

よって  $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0} \quad \dots\dots ①$

(2) ①より  $4\vec{a} + 3\vec{b} = -5\vec{c}$  よって  $|4\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = |-5\vec{c}|^2$

ゆえに  $16|\vec{a}|^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 25|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

①より  $3\vec{b} + 5\vec{c} = -4\vec{a}$  よって  $|3\vec{b} + 5\vec{c}|^2 = |-4\vec{a}|^2$

ゆえに  $9|\vec{b}|^2 + 30\vec{b} \cdot \vec{c} + 25|\vec{c}|^2 = 16|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{b} \cdot \vec{c} = -15$

①より  $5\vec{c} + 4\vec{a} = -3\vec{b}$  よって  $|5\vec{c} + 4\vec{a}|^2 = |-3\vec{b}|^2$

ゆえに  $25|\vec{c}|^2 + 40\vec{c} \cdot \vec{a} + 16|\vec{a}|^2 = 9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{c} \cdot \vec{a} = -20$

(3)  $\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  であるから

$$\begin{aligned} |\vec{OG}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right|^2 = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{9} \\ &= \frac{1}{9} \{ 5^2 + 5^2 + 5^2 + 2 \times 0 + 2 \times (-15) + 2 \times (-20) \} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$|\vec{OG}| > 0$  であるから  $|\vec{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$

したがって  $OG = \frac{\sqrt{5}}{3}$

4

【解答】 (1)  $\vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b}$  (2)  $\vec{OP} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b-c}$

(3)  $\vec{OP} = \frac{5}{2}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OB}$

【解説】

(1) AQ : QB =  $\triangle OAP$  :  $\triangle OBP = a : b$

よって  $\vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b}$

(2) OQ : QP =  $\triangle OAB$  :  $\triangle ABP = (a+b-c) : c$

よって  $\vec{OP} = \frac{a+b}{a+b-c}\vec{OQ} = \frac{a+b}{a+b-c} \times \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b-c}$

(3) 点Pを中心とし、3直線OA, OB, ABに接する円の半径をrとすると

$$a = \triangle OAP = \frac{1}{2} \times 3 \times r = \frac{3}{2}r$$

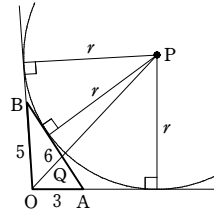
$$b = \triangle OBP = \frac{1}{2} \times 5 \times r = \frac{5}{2}r$$

$$c = \triangle ABP = \frac{1}{2} \times 6 \times r = 3r$$

これらを(2)の結果に代入して

$$\vec{OP} = \frac{\frac{5}{2}r\vec{OA} + \frac{3}{2}r\vec{OB}}{\frac{3}{2}r + \frac{5}{2}r - 3r}$$

$$= \frac{5}{2}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OB}$$



1

【解答】 (1)  $\frac{21}{2}$  (2)  $\vec{AD} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$  (3)  $\vec{AI} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$  (4)  $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

【解説】

(1)  $AB=3, CA=4$  から  $|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$

$BC=2$  すなわち  $|\vec{BC}|=2$  から  $|\vec{c}-\vec{b}|=2$

よって  $|\vec{c}-\vec{b}|^2=4$  すなわち  $|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2=4$

$|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$  を代入して  $16 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 9=4$  ゆえに  $\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{21}{2}$

【別解】  $\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$$

よって  $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos \angle BAC = 3 \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2}$

(2) AD は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 4 \dots\dots ①$$

よって  $\vec{AD} = \frac{4\vec{AB} + 3\vec{AC}}{3+4} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$

(3)  $BD : DC = 3 : 4$  であり、 $BC=2$  であるから

$$BD = \frac{3}{3+4}BC = \frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7}$$

BI は  $\angle B$  の二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD = 3 : \frac{6}{7} = 7 : 2$$

よって  $\vec{AI} = \frac{7}{7+2}\vec{AD} = \frac{7}{9}\left(\frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}\right) = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(4)  $BE : EC = s : (1-s)$  とすると

$$\vec{AE} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c} \text{ と表される。}$$

$IE \perp BC$  であるから  $\vec{IE} \cdot \vec{BC} = 0 \dots\dots ②$

ここで  $\vec{IE} = \vec{AE} - \vec{AI} = \left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b} + \left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

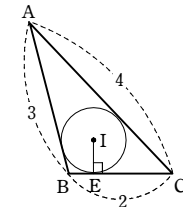
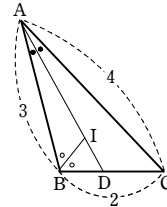
よって、②から  $\left\{\left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b} + \left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\} \cdot (\vec{c}-\vec{b}) = 0$

ゆえに  $\left(s-\frac{5}{9}\right)|\vec{b}|^2 + \left(\frac{8}{9}-2s\right)\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(s-\frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2 = 0$

$|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4, \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{21}{2}$  を代入して  $9\left(s-\frac{5}{9}\right) + \frac{21}{2}\left(\frac{8}{9}-2s\right) + 16\left(s-\frac{1}{3}\right) = 0$

整理すると  $4s-1=0$  よって  $s = \frac{1}{4}$

したがって  $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$



【別解】 まず、 $BE : EC$  を求める。

$\triangle ABC$  の内接円と辺  $AB, CA$  との接点を、それぞれ  $F, G$  とすると

$$AF=AG, BE=BF, CE=CG$$

よって、 $AF=l, BE=m, CE=n$  とおくと、 $AB=3, BC=2, CA=4$  から

$$l+m=3 \dots\dots ③, \quad m+n=2 \dots\dots ④,$$

$$n+l=4 \dots\dots ⑤$$

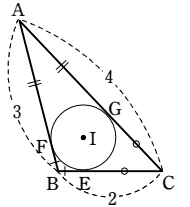
③, ④, ⑤ の辺々を加えて  $2(l+m+n)=9$

よって  $l+m+n = \frac{9}{2} \dots\dots ⑥$

⑥-⑤ から  $m = \frac{1}{2}$  ⑥-③ から  $n = \frac{3}{2}$

ゆえに  $BE : EC = m : n = 1 : 3$

したがって  $\vec{AE} = \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$



2

【解答】 (1) 略 (2)  $\vec{OC} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$

【解説】

(1)  $\angle AOB$  の二等分線と線分  $AB$  の交点を  $D$  とすると

$$AD : DB = OA : OB = |\vec{a}| : |\vec{b}|$$

よって、点  $D$  は線分  $AB$  を  $|\vec{a}| : |\vec{b}|$  に内分する点であるから

$$\vec{OD} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$$

また、点  $P$  が直線  $OD$  上にあるとき

$$\vec{OP} = s\vec{OD} \quad (s \text{ は実数})$$

ゆえに  $\vec{OP} = s\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right) = \frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$  は実数であるから、点  $P$  が  $\angle AOB$  の二等分線上にあるとき、

$$\vec{OP} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \text{ となる実数 } t \text{ が存在する。}$$

(2) 直線  $OA$  上に、 $\vec{OD} = 2\vec{OA}$  となるように  $D$  をとると、点  $C$  は  $\angle BAD$  の二等分線上にある。

よって、(1) から  $\vec{AC} = u\left(\frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)$  となる実数  $u$

が存在する。

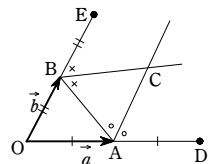
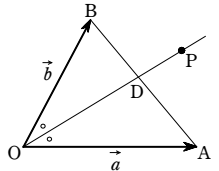
ゆえに  $\vec{AC} = u\left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)$

ここで  $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 5^2 - 2 \times 5 + 7^2 = 64$

$|\vec{AB}| > 0$  であるから  $|\vec{AB}| = 8$  よって  $\vec{OC} - \vec{a} = u\left(\frac{\vec{a}}{7} + \frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$

したがって  $\vec{OC} = \left(1 + \frac{u}{56}\right)\vec{a} + \frac{u}{8}\vec{b} \dots\dots ①$

また、直線  $OB$  上に  $\vec{OE} = 2\vec{OB}$  となるように  $E$  をとると、点  $C$  は  $\angle ABE$  の二等分



第4講 追加演習

線上にある。

よって、(1)から  $\vec{BC} = v \left( \frac{\vec{BE}}{|\vec{BE}|} + \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right)$  となる実数  $v$  が存在する。

ゆえに  $\vec{BC} = v \left( \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} + \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right)$  すなわち  $\vec{OC} - \vec{b} = v \left( \frac{\vec{b}}{5} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{8} \right)$

したがって  $\vec{OC} = \frac{v}{8}\vec{a} + \left(1 + \frac{3}{40}v\right)\vec{b}$  ……②

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  で  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから、①, ②より

$$1 + \frac{v}{56} = \frac{v}{8}, \quad \frac{v}{8} = 1 + \frac{3}{40}v$$

これを解くと  $u = 14, v = 10$

よって、 $u = 14$  を①に代入すると  $\vec{OC} = \left(1 + \frac{14}{56}\right)\vec{a} + \frac{14}{8}\vec{b} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$

3

【解答】(1)  $\vec{OP} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$  (2) 2 : 1

【解説】

(1)  $CP : PM = s : (1-s), BP : PD = t : (1-t)$  とする

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1-s)\vec{OC} + s\vec{OM} \\ &= (1-s)\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} + \frac{s}{2}\vec{b} \\ &= \frac{2(1-s)}{3}\vec{a} + \frac{2+s}{6}\vec{b} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= t\vec{OD} + (1-t)\vec{OB} \\ &= \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②から

$$\frac{2(1-s)}{3}\vec{a} + \frac{2+s}{6}\vec{b} = \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$  であるから

$$\frac{2(1-s)}{3} = \frac{2}{5}t, \quad \frac{2+s}{6} = 1-t$$

これを解いて  $s = \frac{2}{3}, t = \frac{5}{9}$

$t = \frac{5}{9}$  を②に代入して

$$\vec{OP} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}\vec{a} + \left(1 - \frac{5}{9}\right)\vec{b} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \quad \dots\dots ③$$

(2) 点  $Q$  が直線  $OP$  上にあるから、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$  となる実数  $k$  がある。

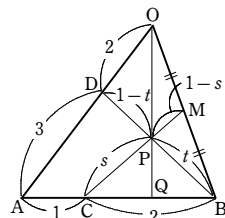
③から  $\vec{OQ} = \frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$  ……④

また、 $AQ : QB = u : (1-u)$  とすると

$$\vec{OQ} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b} \quad \dots\dots ⑤$$

④, ⑤から

$$\frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$  であるから  $\frac{2}{9}k = 1-u, \frac{4}{9}k = u$

これを解いて  $u = \frac{2}{3}, k = \frac{3}{2}$

したがって  $AQ : QB = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$

【参考】 次の項目「ベクトル方程式」で学習する以下のことを用いてもよい。

点  $P(\vec{p})$  が 2 点  $A(\vec{a}), B(\vec{b})$  を通る直線上にある  $\Leftrightarrow \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, s+t=1$

【別解】 点  $Q$  が直線  $OP$  上にあるから、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$  となる実数  $k$  がある。

③から  $\vec{OQ} = \frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$

点  $Q$  は直線  $AB$  上にあるから  $\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1$  よって  $k = \frac{3}{2}$

ゆえに  $\vec{OQ} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2\vec{b}}{2+1}$

よって  $AQ : QB = 2 : 1$

4

【解答】(1)  $\vec{AE} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{d}}{7}, \vec{AF} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3}$  (2)  $\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

(3)  $AB : AD = 3 : 4$

【解説】

(1)  $\vec{AE} = \frac{4\vec{AB} + 3\vec{AD}}{7} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{d}}{7}$

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \vec{d} + \frac{1}{3}\vec{CD} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3}$$

(2)  $\vec{AG} = k\vec{AE}$  ( $k$  は実数) とおける。

よって  $\vec{AG} = \frac{4}{7}k\vec{b} + \frac{3}{7}k\vec{d}$  ……①

また、 $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$  であるから、

$\vec{AG} = \vec{d} + t\vec{b}$  ( $t$  は実数) とおける。

よって  $\vec{AG} = t\vec{b} + \vec{d}$  ……②

$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{d} \neq \vec{0}, \vec{b}$  と  $\vec{d}$  は平行でないから、①, ②より  $\frac{4}{7}k = t, \frac{3}{7}k = 1$

ゆえに  $k = \frac{7}{3}, t = \frac{4}{3}$  よって、②から  $\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

(3)  $\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3} - \vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

$\vec{AG} \perp \vec{BF}$  から  $\vec{AG} \cdot \vec{BF} = 0$  よって  $\left(\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}\right) = 0$

ゆえに  $|\vec{d}|^2 - \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = 0$  したがって  $\frac{|\vec{b}|}{3} = \frac{|\vec{d}|}{4}$

ゆえに  $AB : AD = |\vec{b}| : |\vec{d}| = 3 : 4$

5

【解答】 正三角形

【解説】

$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると、条件式から

$$(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (-\vec{c}) = (-\vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

よって  $-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2$

$-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2$  から  $|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

$|\vec{b}| > 0, |\vec{c}| > 0$  であるから  $|\vec{b}| = |\vec{c}|$  すなわち  $AB = AC$

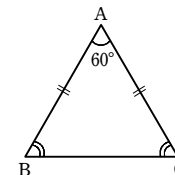
また、 $-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c}$  から  $2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$

よって  $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}|\vec{c}|^2$

ゆえに  $\cos \angle BAC = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2} = \frac{1}{2}$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$  であるから  $\angle BAC = 60^\circ$

したがって、 $AB = AC, \angle BAC = 60^\circ$  となるから、 $\triangle ABC$  は正三角形である。



6

【解答】(1) 略 (2)  $s(4t-1) = t$

【解説】

(1)  $\vec{CI} = \frac{1}{3}(\vec{CG} + \vec{CH}), \vec{CJ} = \frac{1}{3}(\vec{CD} + \vec{CG} + \vec{CH})$

ゆえに  $\vec{IJ} = \vec{CJ} - \vec{CI} = \frac{1}{3}\vec{CD}$

(2) 4 点  $C, D, I, J$  が同一直線上にあるための必要十分条件は、(1)から、点  $I$  が線分  $CD$  上にあること、すなわち、 $\vec{CI} = k\vec{CD}$  となる  $k$  が存在することである。

左辺  $= \vec{CI} = \vec{OI} - \vec{OC}$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OC} + \vec{OG} + \vec{OH}) - \vec{OC}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OG} + \vec{OH} - 2\vec{OC})$$

$$= \frac{1}{9}(\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB} - 6\vec{OC})$$

$$= \frac{1}{9}(s\vec{OA} + t\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OB} - 6s\vec{OA})$$

$$= \frac{1}{9}\{(-5s+1)\vec{OA} + (t+1)\vec{OB}\}$$

右辺  $= k\vec{CD} = k(\vec{OD} - \vec{OC}) = -ks\vec{OA} + kt\vec{OB}$

ゆえに  $-ks = \frac{-5s+1}{9}$  かつ  $kt = \frac{t+1}{9}$

よって  $9ks = 5s-1$  かつ  $9kt = t+1$

したがって  $(5s-1)t = s(t+1)$

ゆえに  $s(4t-1) = t$

$t = \frac{1}{4}$  はこの式を満たさないから  $t \neq \frac{1}{4}$