

1] [大阪市立大]

底面の半径が1の円柱を、底面の直径を含み底面と角 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切っ

てできる小さい方の立体を考える。ただし、円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする。

(1) この立体の体積 V を求めよ。

(2) 切り口の面積 A を求めよ。

【解答】 (1) $\frac{2}{3}\tan\alpha$ (2) $\frac{\pi}{2\cos\alpha}$

【解説】

(1) 右の図のように、底面の中心をOとし、直径MNを含み底面と角 α をなす平面で円柱を切るとする。

$0\leq x\leq 1$ として、線分ON上に $OP=x$ を満たす点Pをとる。

点Pを通り、線分MNに垂直な平面で小さい方の立体を切った切り口は直角三角形であるから、右の図のように、それを $\triangle PQR$ とする。

$$PR=\sqrt{OR^2-OP^2}=\sqrt{1-x^2}$$

$$QR=PR\tan\alpha=\sqrt{1-x^2}\tan\alpha$$

であるから、 $\triangle PQR$ の面積は $\frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2})^2\tan\alpha=\frac{1}{2}(1-x^2)\tan\alpha$

よって、求める体積 V は、対称性を考えて

$$V=2\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)\tan\alpha dx=\tan\alpha\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\tan\alpha$$

(2) $PQ=\frac{PR}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}$ であるから、求める面積 A は対称性を考えて

$$A=2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}dx=\frac{2}{\cos\alpha}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

ここで、 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ は半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ を表すから $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

$$\text{よって}\quad A=\frac{2}{\cos\alpha}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\cos\alpha}$$

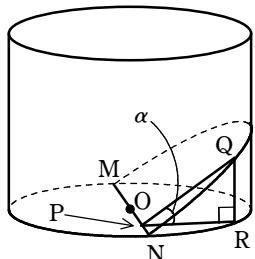
【参考】 水平面と角 α をなす平面上に図形 F があり、その面積を S とする。

図形 F 上の点から水平面に下ろした垂線の足が水平面上に描く図形 F' を、図形 F の水平面への正射影といい、 F' の面積 S' について $S'=S\cos\alpha$ が成り立つ。

このことを利用すると、 A は次のように求められる。

切り口の底面への正射影は、底面の半分の半円であるから

$$A\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2\qquad\text{よって}\quad A=\frac{\pi}{2\cos\alpha}$$



2] [北海道大]

xyz 空間において、連立不等式

$$0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1\geq 0$$

の表す立体を考える。

(1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) この立体の体積を求めよ。

【解答】 (1) $S(t)=(1-\sqrt{1-t^2})^2$ (2) $\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$

【解説】

(1) $0\leq z\leq 1$ であるから $0\leq t\leq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1\geq 0$ において、
 $z=t$ とすると

$$x^2+y^2+t^2-2xy-1\geq 0$$

$$\text{よって}\quad (y-x)^2\geq 1-t^2$$

$$\text{すなわち}\quad y-x\leq -\sqrt{1-t^2}$$

$$\text{または}\quad \sqrt{1-t^2}\leq y-x$$

$$\text{ゆえに}\quad y\leq x-\sqrt{1-t^2}$$

$$\text{または}\quad y\geq x+\sqrt{1-t^2}$$

したがって、平面 $z=t$ で切ったときの断面は、右の図の斜線部分である。

$$\text{また}\quad S(t)=2\cdot\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})^2=(1-\sqrt{1-t^2})^2$$

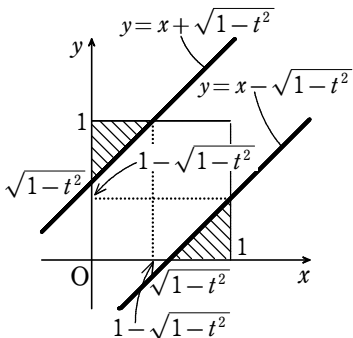
(2) 求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1S(t)dt=\int_0^1(1-\sqrt{1-t^2})^2dt=\int_0^1(2-t^2-2\sqrt{1-t^2})dt$$

$$=\left[2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$$

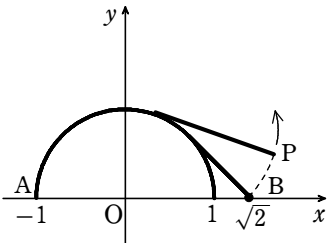
$\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$ は、半径が1の円の面積の $\frac{1}{4}$ を表すから

$$V=2-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$



3 [名古屋市立大]

右の図のように、原点 O を中心とし、 $y \geq 0$ に存在する半径 1 の半円に巻きつけられた糸をひっぱりながら動かす。糸の一端は点 $A(-1, 0)$ に固定され、動かす方の端である点 P は、はじめ点 $B(\sqrt{2}, 0)$ にある。点 P が反時計回りに動くとき、次に x 軸に重なるまでの点 P の描く曲線 C の長さを求めよ。



解答 $\frac{21}{32}\pi^2 + \frac{5}{4}\pi$

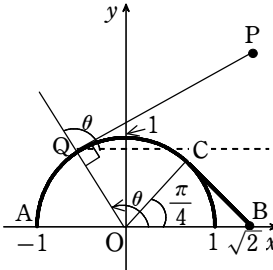
解説

糸と半円が接する部分の端の点のうち、 A でない方を Q とする。

このとき $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$

$\angle BOQ = \theta$ とすると $\overrightarrow{OQ} = (\cos \theta, \sin \theta)$

また、動かす方の端である点 P が B にあるとき、糸と半円の接点を C とする。



このとき、 $CO = 1$ 、 $OB = \sqrt{2}$ 、 $\angle OCB = \frac{\pi}{2}$ より、

$\triangle BCO$ は $CO = CB$ の直角二等辺三角形である。

よって、 $\angle COB = \frac{\pi}{4}$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$

また、扇形 OCQ の半径は 1 、中心角 $\theta - \frac{\pi}{4}$ であるから $\widehat{CQ} = \theta - \frac{\pi}{4}$

よって $QP = \widehat{CQ} + BC = \theta - \frac{\pi}{4} + 1$

さらに、点 Q を通り、 x 軸に平行な直線を考え、 $\overrightarrow{QP}$ と x 軸の正の方向のなす角は

$$\theta - \frac{\pi}{2}$$

したがって $\overrightarrow{QP} = \left(\left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$

$$= \left(\left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \sin \theta, - \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \theta \right)$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \left(\left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \sin \theta + \cos \theta, - \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \theta + \sin \theta \right)$$

ゆえに、 $\theta = \pi$ のとき、点 Q は点 A と一致し、 $P \left(-1, \frac{3}{4}\pi + 1 \right)$ である。

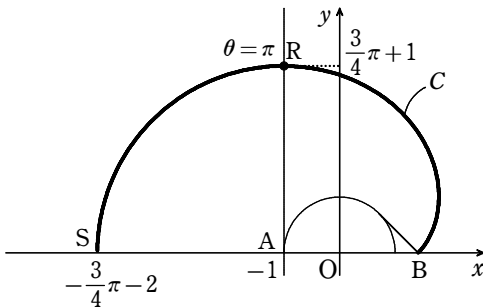
さらに糸を x 軸と重なるまで動かすとき、糸の端が通過する部分は、 $R \left(-1, \frac{3}{4}\pi + 1 \right),$

$S \left(-\frac{3}{4}\pi - 2, 0 \right)$ とおくと、扇形

ARS の弧である。

したがって、曲線 C は右の図のようになる。

$$\begin{cases} x = \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \sin \theta + \cos \theta \\ y = - \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \theta + \sin \theta \end{cases}$$



とおく。

曲線 C の長さを L とすると

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta + \left(\frac{3}{4}\pi + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

ここで $\frac{dx}{d\theta} = 1 \cdot \sin \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \theta - \sin \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cos \theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = - \left\{ 1 \cdot \cos \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot (-\sin \theta) \right\} + \cos \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) \sin \theta$$

よって $\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right)^2 \cos^2 \theta + \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right)^2 \sin^2 \theta = \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right)^2$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $\theta - \frac{\pi}{4} + 1 > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{4} + 1 \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta^2 - \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{9}{32} \pi^2 + \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

ゆえに $L = \left(\frac{9}{32} \pi^2 + \frac{3}{4} \pi \right) + \frac{3}{8} \pi^2 + \frac{\pi}{2} = \frac{21}{32} \pi^2 + \frac{5}{4} \pi$

参考 この点 P が $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ において描く軌跡を、円の伸開線(インボリュート)という。

1[大阪市立大]

底面の半径が1の円柱を，底面の直径を含み底面と角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切つてできる小さい方の立体を考える。ただし，円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする。

(1) この立体の体積 V を求めよ。

(2) 切り口の面積 A を求めよ。

2[北海道大]

xyz 空間において，連立不等式
$$0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1\geq 0$$
の表す立体を考える。

(1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) この立体の体積を求めよ。

3 [名古屋市立大]

右の図のように，原点 O を中心とし， $y \geq 0$ に存在する半径 1 の半円に巻きつけられた糸をひっぱりながら動かす。糸の一端は点 $A(-1, 0)$ に固定され，動かす方の端である点 P は，はじめ点 $B(\sqrt{2}, 0)$ にある。点 P が反時計回りに動くとき，次に x 軸に重なるまでの点 P の描く曲線 C の長さを求めよ。

