

第5講 例題

1

解答 (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 2

解説

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$   
 (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{2} \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{6}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3$   
 (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos^2 x = 2$   
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 (1 + \cos x) = 1^2 \cdot (1 + 1) = 2$

2

解答 (1) 1 (2) -1 (3) 2

解説

- (1)  $\frac{1}{x} = t$  とおくと,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$   
 (2)  $x - \pi = t$  とおくと,  $x \rightarrow \pi$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \pi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$   
 (3)  $x - \pi = t$  とおくと  $x \rightarrow \pi$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 また  $1 + \cos x = 1 + \cos(t + \pi) = 1 - \cos t$   
 よって  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{t}{\sin t} \right)^2 (1 + \cos t) = 1^2 \cdot 2 = 2$

3

解答  $\frac{1}{8}$

解説

OD は  $\angle AOB$  の二等分線であるから  $\angle AOD = \theta$   
 $AB \perp OC$  より,  $OD = OA \cos \theta = \cos \theta$  であるから  $CD = OC - OD = 1 - \cos \theta$

また  $\widehat{AB} = 2\theta$

したがって, 求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{CD}{\widehat{AB}} \right)^2 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

4

解答 (1) 連続 (2) 連続 (3) 不連続

解説

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$   
 また  $f(0) = 0$  ゆえに  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

よって,  $f(x)$  は  $x=0$  で連続である。

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -1$  であるから  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$

また  $f(-1) = -1$  ゆえに  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

よって,  $f(x)$  は  $x=-1$  で連続である。

(3)  $0 < x < 1$  すなわち  $-1 < -x < 0$  のとき  $[-x] = -1$

$-1 < x < 0$  すなわち  $0 < -x < 1$  のとき  $[-x] = 0$

ゆえに  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$

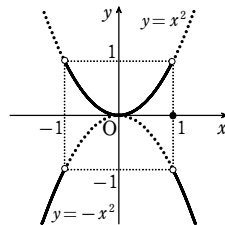
よって,  $x \rightarrow 0$  のときの極限はない。

したがって,  $f(x)$  は  $x=0$  で不連続である。

5

解答 [図]

連続な区間は  $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$



解説

[1]  $|x| < 1$  すなわち  $-1 < x < 1$  のとき  $y = \frac{x^2(1-0)}{1+0} = x^2$

[2]  $x=1$  のとき  $y = \frac{1^2(1-1)}{1+1} = 0$

[3]  $x=-1$  のとき  $\frac{x^2(1-x^n)}{1+x^n} = \frac{(-1)^2(1-(-1)^n)}{1+(-1)^n} = \frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n} = \frac{2}{1+(-1)^n} - 1$

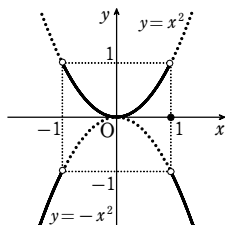
この極限は振動するから,  $y$  の値はない。

[4]  $|x| > 1$  すなわち  $x < -1, 1 < x$  のとき

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x^n} - 1 \right)}{\frac{1}{x^n} + 1} = -x^2$$

したがって, 求めるグラフは右の図の実線部分のようになる。

また, 連続な区間は  $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$



6

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1)  $f(x) = x - 2\sin x - 3$  とおく。

関数  $f(x)$  は区間  $[0, \pi]$  で連続である。

また  $f(0) = -3 < 0, f(\pi) = \pi - 3 > 0$

よって, 方程式  $f(x) = 0$  は  $0 < x < \pi$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

(2)  $f(x) = x - 3^{-x}$  とおく。

関数  $f(x)$  は区間  $[0, 1]$  で連続である。

また  $f(0) = -1 < 0, f(1) = \frac{2}{3} > 0$

よって, 方程式  $f(x) = 0$  は  $0 < x < 1$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

7

解答 略

解説

$h(x) = f(x) - g(x)$  とおく。

$f(x), g(x)$  はともに  $a \leq x \leq b$  で連続であるから,  $h(x) = f(x) - g(x)$  も  $a \leq x \leq b$  で連続である。

また  $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$

よって, 方程式  $h(x) = 0$  すなわち  $f(x) = g(x)$  は中間値の定理により,  $a < x < b$  に実数解をもつ。

第5講 例題演習

1

【解答】 (1) 0 (2)  $\frac{4}{3}$  (3)  $\frac{2}{5}$  (4) 2 (5) 2 (6)  $-\frac{1}{6}$

【解説】

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

【別解】  $4x = \theta$  とおくと,  $x \rightarrow 0$  のとき  $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\frac{3}{4}\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (1 + \cos x) = 1 \cdot 2 = 2$

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{3x^2 \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2 \cos x + 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{\cos x + 1} = 1^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{6}$

2

【解答】 (1)  $-\frac{1}{2}$  (2)  $-\pi$  (3)  $-1$  (4) 1 (5)  $\frac{1}{2}$

【解説】

(1)  $x - \frac{\pi}{2} = t$  とおくと  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき  $t \rightarrow 0$

また  $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t, 2x - \pi = 2t$

よって, 求める極限値は  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sin t}{t} = -\frac{1}{2}$

(2)  $x - 1 = t$  とおくと  $x \rightarrow 1$  のとき  $t \rightarrow 0$

また  $\sin \pi x = \sin \pi(t+1) = -\sin \pi t$

よって  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \cdot \pi = -1 \cdot \pi = -\pi$

(3)  $x - \frac{\pi}{2} = \theta$  とおくと  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき  $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta}{\tan \theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta\right) = -1 \cdot 1 = -1$$

(4)  $\frac{1}{x} = \theta$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $\theta \rightarrow +0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \sin \theta\right)$$
  
 $= 1 - 0 = 1$

(5)  $\frac{1}{x} = t$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$

よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^2} (1 - \cos t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin^2 t}{t^2(1 + \cos t)}$   
 $= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos t} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3

【解答】  $\frac{1}{2r}$

【解説】

P が A に近づくことは  $\theta \rightarrow 0$  で表され,  $\theta$  が鋭角のときを考えると

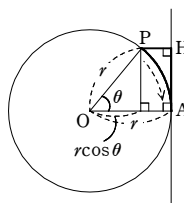
$$\widehat{AP} = r\theta$$
  

$$PH = OA - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

ゆえに  $\frac{PH}{\widehat{AP}} = \frac{r(1 - \cos \theta)}{r^2 \theta^2}$   
 $= \frac{1 - \cos \theta}{r \theta^2(1 + \cos \theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{r \theta^2(1 + \cos \theta)}$

よって, 求める極限は

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{PH}{\widehat{AP}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{r(1 + \cos \theta)} \right\} = 1^2 \cdot \frac{1}{r(1+1)} = \frac{1}{2r}$$



4

【解答】 (1) 連続 (2) 連続 (3) 不連続 (4) 不連続

【解説】

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 0$  より  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

したがって,  $f(x)$  は  $x=0$  で連続である。

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -1} (-1) = -1$

また  $f(-1) = -1$

よって  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

したがって,  $f(x)$  は  $x=-1$  で連続である。

(3)  $-1 < x < 0$  のとき,  $[x] = -1$  であるから  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$

$0 < x < 1$  のとき,  $[x] = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

よって,  $x \rightarrow 0$  のときの  $f(x)$  の極限はない。

したがって,  $f(x)$  は  $x=0$  で不連続である。

(4)  $0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$  のとき,  $0 < \sin x < 1$  であるから  $[\sin x] = 0$

したがって  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = 0$

すなわち  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

また  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

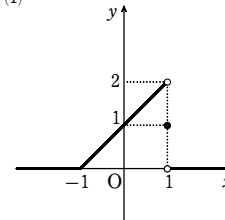
よって  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

したがって,  $f(x)$  は  $x = \frac{\pi}{2}$  で不連続である。

5

【解答】 (1) 図,  $x=1$  で不連続 (2) 図,  $x=m\pi$  ( $m$  は整数) で不連続

(1)



【解説】

(1)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$

[1]  $x^2 < 1$  すなわち  $-1 < x < 1$  のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$  であるから  $f(x) = \frac{1+x}{1+0} = 1+x$

[2]  $x^2 = 1$  すなわち  $x = \pm 1$  のとき  $x^{2n} = 1$

よって,  $x=1$  のとき  $f(x) = \frac{1+1}{1+1} = 1$

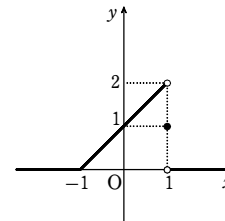
$x=-1$  のとき  $f(x) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

[3]  $x^2 > 1$  すなわち  $x < -1, 1 < x$  のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$  であるから  $f(x) = 0$

よって,  $y=f(x)$  のグラフは図のようになる。

また,  $f(x)$  が不連続である  $x$  の値は  $x=1$



(2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + \frac{1}{n}}{\sin x + \frac{1}{n}}$

[1]  $\sin x \neq 0$  すなわち  $x \neq m\pi$  ( $m$  は整数) のとき

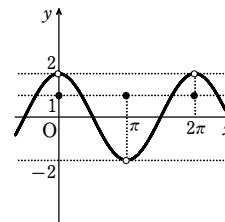
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x$$

[2]  $\sin x = 0$  すなわち  $x = m\pi$  のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

よって,  $y=f(x)$  のグラフは図のようになる。

また,  $f(x)$  が不連続である  $x$  の値は  $x = m\pi$  ( $m$  は整数)



6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1)  $f(x) = x^4 - 5x + 2$  とすると,  $f(x)$  は区間  $[0, 1]$  で連続で

$$f(0) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0, f(1) = 1 - 5 + 2 = -2 < 0$$

よって, 方程式  $f(x) = 0$  は  $0 < x < 1$  の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

(2)  $f(x) = x - 6 \cos x$  とすると,  $f(x)$  は区間  $\left[-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right], \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  で連続で

$$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{9-2\pi}{3} > 0, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{\pi}{3}+3\right) < 0, f(\pi) = \pi+6 > 0$$

よって、方程式  $f(x) = 0$  は  $-\frac{2}{3}\pi < x < -\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{3} < x < \pi$  の範囲に、それぞれ実数解をもつ。

7

解答 略

解説

$h(x) = f(x) - g(x)$  とおく。

関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  は区間  $[a, b]$  で連続であるから、 $h(x)$  も区間  $[a, b]$  で連続である。

$f(x)$  が  $x = x_1$  で最大、 $x = x_2$  で最小であるとする。

$g(x)$  が  $x = x_3$  で最大、 $x = x_4$  で最小であるとする。

条件から  $f(x_1) > g(x_3)$ ,  $f(x_2) < g(x_4)$

一方、 $g(x_3)$  は最大値であるから  $g(x_3) \geq g(x_1)$

$g(x_4)$  は最小値であるから  $g(x_4) \leq g(x_2)$

以上より  $f(x_1) > g(x_3) \geq g(x_1)$ ,  $f(x_2) < g(x_4) \leq g(x_2)$

よって  $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) > 0$ ,  $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) < 0$

したがって、方程式  $h(x) = 0$  は  $x_1$  と  $x_2$  の間に解をもつ。

$a \leq x_1 \leq b$ ,  $a \leq x_2 \leq b$  であるから、方程式  $h(x) = 0$  すなわち  $f(x) = g(x)$  は  $a \leq x \leq b$  の範囲に解をもつ。

1

解答 (1)  $\frac{\pi}{180}$  (2) 1 (3) -1 (4)  $\frac{1}{4}$  (5)  $\frac{9}{2}$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^\circ}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\pi}{180}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x} \cdot \frac{\frac{\pi}{180}}{\cos \frac{\pi}{180}x} = \frac{\pi}{180}$$

$$(2) \sin x = t \text{ とおくと, } x \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$(3) x - \pi = \theta \text{ とおくと, } x \rightarrow \pi \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = -1$$

$$(4) \frac{1}{4x} = \theta \text{ とおくと, } x \rightarrow \infty \text{ のとき } \theta \rightarrow +0$$

$x = \frac{1}{4\theta}$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{4x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4\theta} \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{1}{4}$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3\theta)(1 + \cos 3\theta)}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3\theta}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3\theta}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 9 \cdot \left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 3\theta}$$

$$= 9 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{9}{2}$$

2

解答  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = 0$

解説

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つとする。  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax \sin x + b) = 0 \quad \text{すなわち} \quad b = 0$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{(-a) \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1)\right\} = -2a$$

$$\text{よって, } -2a = 1 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ が成り立つから } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } a = -\frac{1}{2}, b = 0$$

3

解答 線分 OB を 1:2 に内分する点に近づく

解説

図において  $\angle OPQ = \angle APO = \angle PAO = \theta$   
 よって  $\angle PQB = \angle PAQ + \angle APQ = 3\theta$   
 $\triangle OPQ$  において、正弦定理により

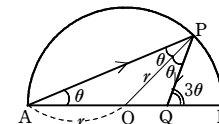
$$\frac{OQ}{\sin \theta} = \frac{OP}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$\text{よって } OQ = \frac{r \sin \theta}{\sin 3\theta}$$

P が限りなく B に近づくとき、 $\theta \rightarrow +0$  であり

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} OQ = \lim_{\theta \rightarrow +0} r \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \cdot \frac{1}{3} = r \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{r}{3}$$

したがって、Q は線分 OB を 1:2 に内分する点に近づく。



4

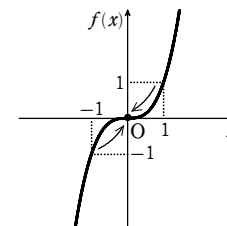
解答 (1) 連続 (2) 不連続 (3) 不連続

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 0 \text{ から}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

よって、関数  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続である。

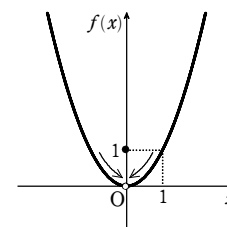


(2) この関数のグラフは右図のようになり、 $x = 0$  で切れている。

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 1$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

よって、関数  $f(x)$  は  $x = 0$  で不連続である。



$$(3) -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \text{ とすると}$$

$$0 \leq \cos x < 1$$

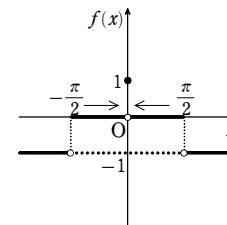
$$\text{よって } [\cos x] = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = 0$$

$$\text{また } f(0) = [1] = 1$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

したがって、関数  $f(x)$  は  $x = 0$  で不連続である。



5

解答  $a = \frac{9}{2}$

解説

$$\frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} = \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} = \frac{\sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)}$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{3^2}{1 + \cos 3x} \right\} = 1^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

また  $f(0) = a$

$f(x)$  が  $x=0$  において連続であるとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  であるから  $a = \frac{9}{2}$

6

解答  $a=1, b=-1$

解説

[1]  $-1 < x < 1$  のとき  $f(x) = \frac{0-0+ax^2+bx}{0+1} = ax^2+bx$

[2]  $x < -1, 1 < x$  のとき  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1 - \frac{1}{x}$

[3]  $x=1$  のとき  $f(1) = \frac{a+b}{2}$

[4]  $x=-1$  のとき  $f(-1) = \frac{2+a-b}{2}$

$f(x)$  は  $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$  で、それぞれ連続であるから、 $f(x)$  がすべての実数  $x$  で連続であるための条件は、 $f(x)$  が  $x = \pm 1$  で連続であることである。

よって  $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1)$  かつ  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$

ゆえに  $2 = a - b = \frac{2+a-b}{2}$  かつ  $a + b = 0 = \frac{a+b}{2}$

これを解いて  $a=1, b=-1$

1

解答  $a=4, b=-1$ , 極限值  $-\frac{15}{8}$

解説

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} = P$  とおく。

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  であるから、 $P$  が有限の値となるためには

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)] = 0$$

よって、 $\sqrt{9+7} - a = 0$  すなわち  $a=4$  であることが必要である。

このとき  $P = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-8x+7\cos 2x - (4+bx)^2}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b^2 - 8 \cdot \frac{b+1}{x} - 7 \cdot \frac{1-\cos 2x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx} \dots \textcircled{1}$$

ここで  $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx] = \sqrt{9+7} + 4 = 8$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$  であることに注意すると、 $P$  が有限の

値となるための条件は  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b+1}{x}$  が有限の値に収束することで、 $b=-1$  である。

このとき、 $\textcircled{1}$  から  $P = \frac{-(-1)^2 - 0 - 7 \cdot 2}{8} = -\frac{15}{8}$

以上から  $a=4, b=-1$ , 極限值  $-\frac{15}{8}$

2

解答 (1)  $(t\sqrt{1+\sin^2 t}, 0)$  (2)  $(0, \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}))$

(3) 点  $(0, 2)$

解説

(1)  $t > 0$  であるから  $OQ = OP = \sqrt{t^2 + (t\sin t)^2} = t\sqrt{1+\sin^2 t}$

よって  $Q(t\sqrt{1+\sin^2 t}, 0)$

(2) 直線 PQ の方程式  $y = \frac{t\sin t}{t-t\sqrt{1+\sin^2 t}}(x-t\sqrt{1+\sin^2 t})$  において、 $x=0$  とすると

$$y = \frac{-t^2 \sin t \sqrt{1+\sin^2 t}}{t(1-\sqrt{1+\sin^2 t})} = \frac{-t^2 \sin t \sqrt{1+\sin^2 t}(1+\sqrt{1+\sin^2 t})}{t\{1-(1+\sin^2 t)\}} = \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t})$$

よって  $R(0, \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}))$

(3) 点 P が原点 O に限りなく近づくとき、 $t \rightarrow +0$  であり

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}) = 1 \cdot (1+0+1) = 2$$

したがって、点 R は点  $(0, 2)$  に近づく。

3

解答 (1) 略 (2)  $\frac{2}{\pi}$

解説

(1)  $\theta = \frac{\pi}{2^{n+1}}$  とおくと  $a_n = \tan \theta, a_{n+1} = \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \tan \frac{\theta}{2}$

$\tan \theta = \tan\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$  であるから  $a_n = \frac{2a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2}$

逆数をとって  $\frac{1}{a_n} = \frac{1 - a_{n+1}^2}{2a_{n+1}}$  ゆえに  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{2}$

よって  $\frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$  すなわち  $a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}$  とおくと、(1) から

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} a_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} a_k + \frac{1}{2} a_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{2}{a_{k-1}} \right) + \frac{1}{2} a_1$$

$$= \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{2^k a_k} - \frac{1}{2^{k-1} a_{k-1}} \right) + \frac{1}{2} a_1 = \left( \frac{1}{2^n a_n} - \frac{1}{2 a_1} \right) + \frac{1}{2} a_1$$

$$= \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2 \tan \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{2^2}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow 0$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$

よって  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

4

解答 (1)  $k$  は偶数である (2) 略

解説

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \{(\cos x)^{n-1} - (\cos x)^{n+k-1}\} = [1 - (\cos x)^k] \sum_{n=1}^{\infty} (\cos x)^{n-1}$

初項  $1 - (\cos x)^k$ , 公比  $\cos x$  の無限等比級数だから、収束する条件は

$$1 - (\cos x)^k = 0 \text{ または } -1 < \cos x < 1$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$  であるから、 $\cos x = \pm 1$  のとき  $1 - (\cos x)^k = 0$  となる条件は、 $k$  が偶数であることである。⊗

(2)  $\cos x \neq 1$  のとき、

$$x \neq 0 \text{ で } f(x) = (1 - \cos^k x) \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{n-1} x = \frac{1 - \cos^k x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x + \dots + \cos^{k-1} x$$

よって  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k > 0$

一方  $f(0) = 0$  ゆえに  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

よって、 $x=0$  において  $f(x)$  は連続でない。

5

解答 (1) [略] (2) [略] (3)  $-\frac{1}{2}$

解説

- (1)  $y = x^3 + ax^2 + (a-3)x - 1 = x^3 - 3x - 1 + x(x+1)a$  から任意の  $a$  に対して  $y = x^3 - 3x - 1, x(x+1) = 0$  が成り立つ。したがって  $(0, -1), (-1, 1)$  を通る。  
 (2)  $f(x) = x^3 + ax^2 + (a-3)x - 1$  より  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a - 3$   
 $f'(x) = 0$  の判別式を  $D$  とすると  $\frac{D}{4} = a^2 - 3a + 9 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$  であるから  $y = f(x)$  は極大値と極小値をもつ。ここで  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(-1) > 0, f(0) < 0,$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  であるから  $f(x) = 0$  は3つの異なる実数解をもつ。

(3)  $3x^2 + 2ax + a - 3 = 0$  を解くと  $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3}$

$x(a) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3}$  から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} x(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-3a + 9}{3(\sqrt{a^2 - 3a + 9} + a)}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a + 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 9} + a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{3}{a}}{\sqrt{1 - \frac{3}{a} + \frac{9}{a^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

1

解答 3

解説

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{1}{3}\left[(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]\right\}} = \frac{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{1}{3}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}\right]\right\}}$$

$$= \frac{(n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\{(n+1) - n\}} = \frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} + 1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1$$

よって (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right\} = 1 + 1 + 1 = 3$

2

解答 (1)  $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$  (2)  $a_n = n(n+1)$  (3) 1

解説

(1)  $(a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$  から  
 $a_{n+1}^2 - 2(a_{n+1} + a_n)a_{n+1} + a_n^2 - 2a_n = 0$

ゆえに  $a_{n+1} = a_n + 1 \pm \sqrt{4a_n + 1}$

また,  $a_1 = 2, a_{n+1} > a_n$  であるから

$$a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1} \dots \dots \textcircled{1}$$

よって  $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$

(2)  $a_1 = 2 = 1 \cdot 2, a_2 = 6 = 2 \cdot 3, a_3 = 12 = 3 \cdot 4, a_4 = 20 = 4 \cdot 5$  であるから,  $a_n = n(n+1)$

と推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

[1]  $n = 1$  のとき  $a_1 = 2$  で成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき  $a_k = k(k+1)$  と仮定すると

$$\textcircled{1} \text{ から } a_{k+1} = k(k+1) + 1 + \sqrt{4k(k+1) + 1}$$

$$= k(k+1) + 1 + (2k+1)$$

$$= (k+1)(k+2)$$

となり,  $n = k+1$  のときも成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  に対して,  $a_n = n(n+1)$  が成り立つ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \right\}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} \times \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1$

3

解答 (1)  $a_n = 2^n$  (2)  $T_n = \frac{8^n}{3}$  (3)  $\frac{1}{21}$

解説

(1)  $S(t) = \int_0^t x^2 dx = \frac{1}{3}t^3$

$S(a_{n+1}) = 8S(a_n)$  から  $\frac{1}{3}a_{n+1}^3 = 8 \cdot \frac{1}{3}a_n^3$

よって  $a_{n+1}^3 = 8a_n^3$

ゆえに

$$a_{n+1}^3 - 8a_n^3 = a_{n+1}^3 - (2a_n)^3$$

$$= (a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + 4a_n^2)$$

$$= 0$$

$a_{n+1} > a_n > 0$  であるから  $a_{n+1} = 2a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

数列  $\{a_n\}$  は, 初項  $a_1 = 2$ , 公比 2 の等比数列であるから  $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

(2)  $C: y = x^2$  について,  $y' = 2x$  から,  $C$  上の点  $(a_n, a_n^2)$  における接線の方程式は

$y - a_n^2 = 2a_n(x - a_n)$  ゆえに  $y = 2a_nx - a_n^2$

よって

$$T_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{x^2 - (2a_nx - a_n^2)\} dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} (x - a_n)^2 dx$$

$$= \left[ \frac{(x - a_n)^3}{3} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = \frac{(a_{n+1} - a_n)^3}{3} = \frac{(2a_n - a_n)^3}{3}$$

$$= \frac{a_n^3}{3} = \frac{(2^n)^3}{3} = \frac{8^n}{3}$$

(3)  $U_n = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{8^k}{3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{8^n - 1}{8 - 1} = \frac{8^{n+1} - 8}{21}$

よって  $\frac{U_{n-1}}{a_n^3} = \frac{8^n - 8}{21} \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{21} \cdot \frac{8^n - 8}{8^n} = \frac{1}{21} \left( 1 - \frac{1}{8^{n-1}} \right)$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-1}}{a_n^3} = \frac{1}{21}$

4

解答 (1) 略 (2) 略 (3)  $1 + \sqrt{2}$

解説

(1)  $f(x) = x$  より  $\sqrt{2x+1} = x$

よって  $x \geq 0$  かつ  $2x+1 = x^2$

$2x+1 = x^2$  を解くと  $x = 1 \pm \sqrt{2}$   $x \geq 0$  より  $x = 1 + \sqrt{2}$

よって  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$

すべての自然数  $n$  に対して,  $a_n > \alpha \dots \dots \textcircled{1}$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]  $n = 1$  のとき

$$a_1 = 3 = 1 + 2 > 1 + \sqrt{2} = \alpha$$

よって,  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき,  $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定すると

$$a_k > \alpha$$

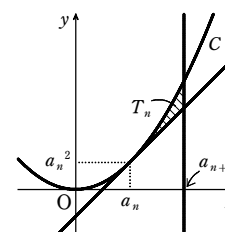
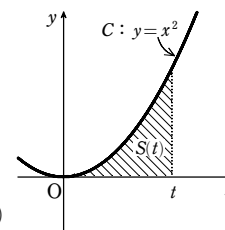
$f(x)$  は単調に増加する関数であるから,  $a_k > \alpha$  より  $f(a_k) > f(\alpha)$

$f(\alpha) = \alpha$  であるから  $a_{k+1} > \alpha$

よって,  $n = k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  に対して  $a_n > \alpha$  が成り立つ。

(2)  $a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha) = \sqrt{2a_n + 1} - \sqrt{2\alpha + 1}$



章末問題A

$$= \frac{(2a_n+1)-(2\alpha+1)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

(1) より,  $a_n > \alpha$  であるから

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{2(a_n - \alpha)}{\sqrt{2a_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}} = \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{2\alpha+1}}$$

ここで  $\sqrt{2\alpha+1} = \alpha = 1 + \sqrt{2} > 1 + 1 = 2$

$$a_n - \alpha > 0 \text{ より } a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

(3) (2) より,  $n \geq 2$  のとき

$$a_n - \alpha < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \alpha) < \left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2} - \alpha) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha)$$

(1) と合わせると,  $n \geq 2$  のとき  $0 < a_n - \alpha < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha) = 0$  であるから, はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha) = 0$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  は収束し, その極限值は  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  である。

5

【解答】  $\log 2$

【解説】

[1]  $n = 2m$  のとき

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{2m-1} + b_{2m}) \\ &= \sum_{i=1}^m (b_{2i-1} + b_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left( \log \frac{2i+1}{2i-1} - \log \frac{2i+2}{2i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m [(\log(2i+1) - \log(2i-1)) + (\log 2i - \log(2i+2))] \\ &= \log(2m+1) - \log 1 + \log 2 - \log(2m+2) = \log \frac{2(2m+1)}{2m+2} = \log \frac{2m+1}{m+1} \end{aligned}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } m \rightarrow \infty \text{ であるから } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{2 + \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} = \log 2$$

[2]  $n = 2m - 1$  のとき

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= S_{2m} - b_{2m} = S_{2m} + \log \frac{2m+2}{2m} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{2m+2}{2m} = \log 2 + \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{m} \right) = \log 2 \end{aligned}$$

[1], [2] より,  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \log 2$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2$

6

【解答】  $-\frac{1}{a^2+1}$

【解説】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cos \pi + \left(\frac{1}{a}\right)^3 \cos \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{1}{a}\right)^4 \cos 2\pi + \dots$$

$k$  を自然数とすると,  $n = 4k - 3$  のとき  $\cos \frac{n\pi}{2} = 0,$

$n = 4k - 2$  のとき  $\cos \frac{n\pi}{2} = -1,$

$n = 4k - 1$  のとき  $\cos \frac{n\pi}{2} = 0,$

$n = 4k$  のとき  $\cos \frac{n\pi}{2} = 1$

よって,  $S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2}$  とおくと

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{a}\right)^{2j} (-1)^j = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{a^2}\right)^j \\ &= \frac{-\frac{1}{a^2} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)^N \right]}{1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)} = -\frac{1}{a^2+1} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)^N \right] \end{aligned}$$

$a > 1$  より,  $-1 < -\frac{1}{a^2} < 0$  であるから  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = -\frac{1}{a^2+1}$

また  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N} + 0) = -\frac{1}{a^2+1}$

ゆえに,  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  は収束し, 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2}$  の和は  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = -\frac{1}{a^2+1}$

7

【解答】 (1)  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$  (2)  $p_n = \frac{30}{91} \left[ 1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right], \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{30}{91}$

【解説】

(1)  $k$  回以内に勝者が決まらないのは, 1回目から  $k$ 回目まで毎回 1以外の目が出る時である。

よって, 求める確率は  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$

$$\begin{aligned} (2) p_n &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{3i-2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{25} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^i = \frac{6}{25} \cdot \frac{125}{216} \left[ 1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right] = \frac{30}{91} \left[ 1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right] \end{aligned}$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{30}{91}$

8

【解答】  $\frac{\pi}{4} \leq \angle C < \frac{\pi}{2}$

【解説】

$\angle C = \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とし,  $\triangle ABC$  の面積を  $k$  とする。

$\triangle CBA \sim \triangle CAA_1$  で  $CB : CA = 1 : \cos \theta$  から  $\triangle CBA : \triangle CAA_1 = 1 : \cos^2 \theta$

ゆえに  $\triangle CAA_1 = k \cos^2 \theta$

A を  $A_0$  とすると,  $n \geq 1$  のとき  $\triangle CA_n A_{n+1} \sim \triangle CA_{n-1} A_n$  であり, その相似比は

$$1 : \cos \theta$$

よって,  $\triangle CA_n A_{n+1} = \triangle CA_{n-1} A_n \cos^2 \theta$  であるから  $\triangle CA_{n-1} A_n = k \cos^{2n} \theta$

ゆえに,  $\triangle CAA_1, \triangle CA_1 A_2, \triangle CA_2 A_3, \dots$  の面積の総和  $S$  は, 初項  $k \cos^2 \theta$ , 公比  $\cos^2 \theta$  の無限等比級数である。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $|\cos^2 \theta| < 1$  であるから,  $S$  は収束して

$$S = \frac{k \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{k \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k}{\tan^2 \theta}$$

$S$  が  $\triangle ABC$  の面積  $k$  を超えないことから  $\frac{k}{\tan^2 \theta} \leq k$

すなわち  $\tan^2 \theta \geq 1$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\tan \theta > 0$  であるから  $\tan \theta \geq 1$

よって  $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  すなわち  $\frac{\pi}{4} \leq \angle C < \frac{\pi}{2}$

9

【解答】 (1)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (2) 略 (3) 略 (4)  $\frac{3}{4}$

【解説】

(1)  $r = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(2)  $a_n + b_n i = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n-1} \dots \dots$  ① とする。

[1]  $n = 1$  のとき

(左辺)  $= a_1 + b_1 i = 1,$  (右辺)  $= \left(\frac{1+2i}{3}\right)^0 = 1$

よって, ① は成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき ① が成り立つと仮定すると

$$a_k + b_k i = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1}$$

$n = k+1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} a_{k+1} + b_{k+1} i &= \left(\frac{1}{3} a_k - \frac{2}{3} b_k\right) + \left(\frac{2}{3} a_k + \frac{1}{3} b_k\right) i \\ &= \frac{1}{3} (a_k + b_k i) + \frac{2}{3} i (a_k + b_k i) = \frac{1+2i}{3} (a_k + b_k i) \\ &= \frac{1+2i}{3} \cdot \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^k \end{aligned}$$

よって,  $n = k+1$  のときも ① が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  で ① が成り立つ。

(3)  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \dots \dots$  ② とする。

[1]  $n = 1$  のとき

(左辺)  $= 1,$  (右辺)  $= \frac{1-z}{1-z} = 1$

よって, ② は成り立つ。

[2]  $n = k$  のとき ② が成り立つと仮定すると

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} = \frac{1-z^k}{1-z}$$

$n = k+1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} + z^k \\ = \frac{1-z^k}{1-z} + z^k = \frac{1-z^k + (1-z)z^k}{1-z} = \frac{1-z^{k+1}}{1-z} \end{aligned}$$

章末問題A

よって、 $n=k+1$  のときも②が成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数  $n$  で②が成り立つ。

(4)  $\frac{1+2i}{3} = z$  とすると、 $z \neq 1$  であるから、(2), (3)より

$$\sum_{n=1}^N (a_n + b_n i) = \sum_{n=1}^N z^{n-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$$

(1)より、 $|z| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$  であるから  $\lim_{N \rightarrow \infty} |z|^N = \lim_{N \rightarrow \infty} |z|^N = 0$

よって  $\lim_{N \rightarrow \infty} z^N = 0$

ゆえに  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n + b_n i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-z^N}{1-z} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1+2i}{3}} = \frac{3}{2(1-i)} = \frac{3+3i}{4}$

したがって  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \frac{3}{4}$

10

解答 4

解説

円  $C_n$  に内接する正方形を  $A_n$  とし、 $A_n$  をその1辺が  $x$  軸に平行になるように作る。

円  $C_n$  の半径を  $r_n$  とすると、正方形  $A_n$  の1辺の長さは

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r_n = \sqrt{2} r_n$$

また、正方形  $A_n$  の1辺の長さは  $2r_{n+1}$  であるから

$$2r_{n+1} = \sqrt{2} r_n$$

すなわち  $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$

$r_1 = 1$  であるから、数列  $\{r_n\}$  は初項1, 公比  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  の等比数列である。

ゆえに  $r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

正方形  $A_n$  の1辺の長さは  $2r_{n+1} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

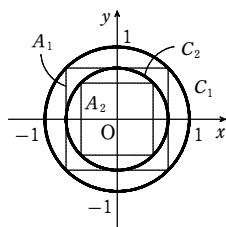
よって  $a_n = \left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

したがって  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$

11

解答  $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解説



$\triangle OAB$  は1辺の長さが2の正三角形である。

よって、 $\triangle P_n B Q_n$ ,  $\triangle Q_n O R_n$ ,  $\triangle R_n A P_{n+1}$  は

相似な直角三角形であり、

$$P_n B : B Q_n = Q_n O : O R_n \\ = R_n A : A P_{n+1} = 2 : 1$$

が成り立つ。

$A P_n = a_n$  とすると  $P_n B = AB - A P_n = 2 - a_n$

よって  $B Q_n = \frac{1}{2} P_n B = 1 - \frac{1}{2} a_n$

同様に考えると

$$Q_n O = 2 - B Q_n = 1 + \frac{1}{2} a_n, \quad O R_n = \frac{1}{2} Q_n O = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a_n,$$

$$R_n A = 2 - O R_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} a_n, \quad A P_{n+1} = \frac{1}{2} R_n A = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} a_n$$

したがって  $a_{n+1} = -\frac{1}{8} a_n + \frac{3}{4}$

この漸化式を変形して  $a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{8} \left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

数列  $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$  は、初項  $a_1 - \frac{2}{3}$ , 公比  $-\frac{1}{8}$  の等比数列であるから

$$a_n - \frac{2}{3} = \left(a_1 - \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって  $a_n = \left(a_1 - \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$

ここで、 $P_1$  は線分  $AB$  上にあり、 $A, B$  とは異なる点であるから  $0 < a_1 < 2$

$\left|-\frac{1}{8}\right| < 1$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

よって、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $P_n$  が限りなく近づく点を  $P$  とすると

$$AP = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}, \quad BP = 2 - AP = \frac{4}{3}$$

したがって、点  $P$  は線分  $AB$  を  $1:2$  に内分する点であるから、求める点の座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{1+2}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot \sqrt{3}}{1+2}\right) \text{ から } \left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

12

解答 (1)  $\theta_2 = \frac{\theta}{2}, \theta_3 = \frac{3}{4}\theta$  (2) 略 (3)  $\frac{2}{3}\theta$

解説

(1)  $\triangle P_1 P_2 P_3$  は  $P_1 P_2 = P_1 P_3$  の二等辺三角形で、

$\angle P_1 P_2 P_3 = \angle P_1 P_3 P_2$  であるから

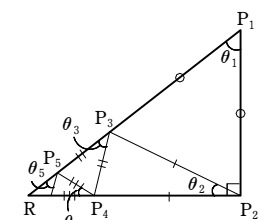
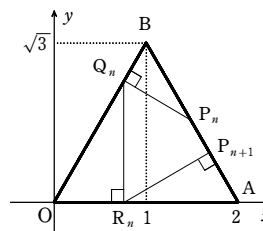
$$\angle P_1 P_2 P_3 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

よって  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \angle P_1 P_2 P_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

同様に、 $\angle P_2 P_3 P_4 = \frac{\pi - \theta_2}{2}$  であるから

$$\theta_3 = \pi - \angle P_2 P_3 P_4 - \angle P_1 P_3 P_2$$

$$= \pi - \frac{\pi - \theta_2}{2} - \frac{\pi - \theta_1}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} + \theta\right) = \frac{3}{4}\theta$$

(2) (1)と同様に考えると

$$\angle P_n P_{n+1} P_{n+2} = \frac{\pi - \theta_n}{2}, \quad \angle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3} = \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2}$$

よって  $\theta_{n+2} = \pi - \angle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3} - \angle P_n P_{n+1} P_{n+2}$   
 $= \pi - \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2} - \frac{\pi - \theta_n}{2} = \frac{\theta_{n+1}}{2} + \frac{\theta_n}{2}$

変形すると  $\theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$

ゆえに、 $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) は  $n$  によらない定数  $\theta_2 + \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$  である。

(3)  $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta$  から  $\theta_{n+1} - \frac{2}{3}\theta = -\frac{1}{2}(\theta_n - \frac{2}{3}\theta)$

したがって、数列  $\left\{\theta_n - \frac{2}{3}\theta\right\}$  は、初項  $\theta_1 - \frac{2}{3}\theta = \theta - \frac{2}{3}\theta = \frac{\theta}{3}$ , 公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列

であるから  $\theta_n - \frac{2}{3}\theta = \frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに  $\theta_n = \frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\theta$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\theta\right\} = \frac{2}{3}\theta$

13

解答 略

解説

$x \rightarrow 0$  のときを考えるのであるから、 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  としてよい。

[1]  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき 点  $O$  を中心とする半径1の円において、中心角  $x$  の扇形  $OAB$

を考える。点  $B$  から  $OA$  に下ろした垂線を  $BH$ , 点  $A$  における円  $O$  の接線が  $OB$  の延長と交わる点を  $T$  とすると、 $AT$  は  $OA$  に垂直で、面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle OAT$$

$BH = \sin x$ ,  $AT = \tan x$  であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

よって  $\sin x < x < \tan x$

各辺を  $\sin x$  で割ると、 $\sin x > 0$  であるから

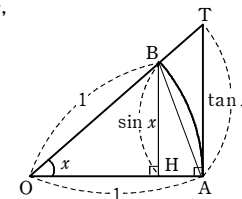
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ゆえに  $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  であるから  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[2]  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  のとき  $x = -\theta$  とおくと

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



[1], [2] から  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[14]

【解答】 (1)  $AP = \sqrt{5-4\cos\theta}$ ,  $BP = \sqrt{10-6\cos\theta}$   
 (2)  $\cos \angle BAP = \frac{\cos\theta - 2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$ ,  $\sin \angle BAP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$   
 (3) 1

【解説】

(1)  $\triangle OAP$  において、余弦定理により  
 $AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos\theta$

よって  $AP^2 = 5 - 4\cos\theta$   
 $AP > 0$  であるから  $AP = \sqrt{5-4\cos\theta}$

$\triangle OBP$  において、余弦定理により  
 $BP^2 = OB^2 + OP^2 - 2OB \cdot OP \cos\theta$

よって  $BP^2 = 10 - 6\cos\theta$   
 $BP > 0$  であるから  $BP = \sqrt{10-6\cos\theta}$

(2)  $\triangle ABP$  において、余弦定理により  
 $\cos \angle BAP = \frac{AB^2 + AP^2 - BP^2}{2AB \cdot AP}$

よって  $\cos \angle BAP = \frac{1+5-4\cos\theta-(10-6\cos\theta)}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5-4\cos\theta}} = \frac{\cos\theta - 2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

また  $\sin^2 \angle BAP = 1 - \frac{(\cos\theta - 2)^2}{5-4\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}$

$0 < \theta < \pi$  より  $\sin\theta > 0$  であるから  $\sin \angle BAP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

(3)  $\triangle ABP$  において、正弦定理により  $\frac{BP}{\sin \angle BAP} = 2R$

よって  $\theta R = \frac{\theta \sqrt{10-6\cos\theta}}{2 \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}} = \frac{\theta \sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2\sin\theta}$

ゆえに  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta R = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2 \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = 1$

[15]

【解答】 (1)  $OQ = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$  (2)  $\frac{3}{4}$

【解説】

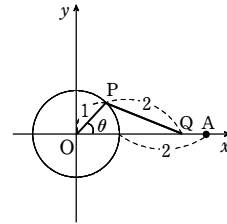
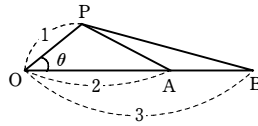
(1)  $OQ = x$  とおく。  $\triangle OPQ$  において、余弦定理により  
 $2^2 = 1^2 + x^2 - 2x \cos\theta$

よって  $x^2 - 2(\cos\theta)x - 3 = 0$   
 ゆえに  $x = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + 3}$

$x > 0$  であるから  $x = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$   
 したがって  $OQ = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$

(2)  $A(3, 0)$  であるから

$L = OA - OQ = 3 - (\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})$   
 $= 3 - \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta + 3}$



よって  $\frac{L}{\theta^2} = \frac{3 - \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta + 3}}{\theta^2} = \frac{(3 - \cos\theta)^2 - (\cos^2\theta + 3)}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})}$   
 $= 6 \cdot \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})}$   
 $= 6 \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})(1 + \cos\theta)}$   
 $= 6 \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})(1 + \cos\theta)}$

ゆえに  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L}{\theta^2} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(2+2) \cdot 2} = \frac{3}{4}$

[16]

【解答】 (1)  $(\sqrt{1-4\sin^2\theta}, 2\sin\theta)$  (2)  $Q' \left( \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}, 1 \right)$ ,  $R' \left( \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}, 1 \right)$

(3) 8

【解説】

(1)  $\angle AOP = \theta$  であるから  $P(\cos\theta, \sin\theta)$

すなわち  $x_1 = \cos\theta$ ,  $y_1 = \sin\theta$

$y_2 = 2y_1$  であるから  $y_2 = 2\sin\theta$

点 Q は曲線 C 上にあるから  $x_2^2 + y_2^2 = 1$

$x_2 > 0$  であるから  $x_2 = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$

よって  $Q(\sqrt{1-4\sin^2\theta}, 2\sin\theta)$

(2) 直線 OQ の式は  $y = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}x$  であるから、

$y=1$  のとき  $x = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$  よって  $Q' \left( \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}, 1 \right)$

また、 $\angle AOP = 4\angle AOR$  であるから  $\angle AOR = \frac{\theta}{4}$

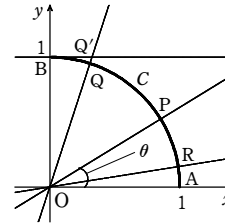
ゆえに、 $R \left( \cos \frac{\theta}{4}, \sin \frac{\theta}{4} \right)$  であるから、直線 OR の式は  $y = x \tan \frac{\theta}{4}$

$y=1$  のとき  $x = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}$  したがって  $R' \left( \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}, 1 \right)$

(3) (2) から  $BR' = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}$ ,  $BQ' = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

よって、点 P が点 A に限りなく近づくときの  $\frac{BR'}{BQ'}$  の極限は

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{BR'}{BQ'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta}{\tan \frac{\theta}{4} \cdot \sqrt{1-4\sin^2\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta \cos \frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4} \cdot \sqrt{1-4\sin^2\theta}}$   
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4}} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}} \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 8$



[1]

【解答】 (1)  $s = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$  (2)  $\sqrt{2}$

【解説】

(1)  $AR : RQ = \alpha : (1-\alpha)$  とすると

$\vec{CR} = (1-\alpha)\vec{CA} + \alpha\vec{CQ}$   
 $= (1-\alpha)\vec{CA} + \alpha(1-t)\vec{CB}$

$BR : RP = \beta : (1-\beta)$  とすると

$\vec{CR} = \beta\vec{CB} + (1-\beta)\vec{CA}$   
 $= \beta(1-s)\vec{CA} + (1-\beta)\vec{CB}$

よって

$(1-\alpha)\vec{CA} + \alpha(1-t)\vec{CB} = \beta(1-s)\vec{CA} + (1-\beta)\vec{CB}$

ここで、 $\vec{CA} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{CB} \neq \vec{0}$  かつ  $\vec{CA} \not\parallel \vec{CB}$  であるから

$1-\alpha = \beta(1-s)$ ,  $\alpha(1-t) = 1-\beta$

これを解くと  $\alpha = \frac{s}{s+t-st}$ ,  $\beta = \frac{t}{s+t-st}$  ……①

ここで、 $\triangle APR : \triangle BQR = 2 : 1$  であるから

$\frac{1}{2} \times AR \times RP \sin \angle ARP = 2 \times \frac{1}{2} \times BR \times RQ \sin \angle BRQ$

$\angle ARP = \angle BRQ$  であるから  $AR \times RP = 2BR \times RQ$

すなわち  $\alpha A Q \times (1-\beta) B P = 2\beta B P \times (1-\alpha) A Q$

ゆえに  $\alpha(1-\beta) = 2\beta(1-\alpha)$

①を代入すると  $\frac{s}{s+t-st} \left(1 - \frac{t}{s+t-st}\right) = \frac{2t}{s+t-st} \left(1 - \frac{s}{s+t-st}\right)$

よって  $(1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$

$0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$  であるから

$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + (1-t) \cdot 2t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$

【別解】  $\triangle BCP$  と直線 AQ について、メネラウスの定理

により

$\frac{BR}{RP} \times \frac{PA}{AC} \times \frac{CQ}{QB} = 1$  から

$\frac{BR}{RP} \times \frac{s}{1} \times \frac{1-t}{t} = 1$

よって  $\frac{BR}{RP} = \frac{t}{s(1-t)}$

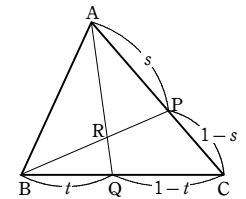
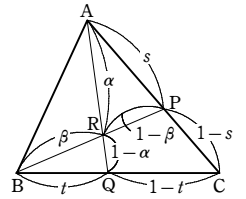
また、 $\triangle ACQ$  と直線 BP について、メネラウスの定理により

$\frac{AR}{RQ} \times \frac{QB}{BC} \times \frac{CP}{PA} = 1$  から  $\frac{AR}{RQ} \times \frac{t}{1} \times \frac{1-s}{s} = 1$

よって  $\frac{AR}{RQ} = \frac{s}{t(1-s)}$

ゆえに  $\frac{\triangle APR}{\triangle BQR} = \frac{\frac{1}{2} \times AR \times RP \sin \angle ARP}{\frac{1}{2} \times BR \times RQ \sin \angle BRQ} = \frac{AR}{RQ} \times \frac{RP}{BR}$

$= \frac{s}{t(1-s)} \times \frac{s(1-t)}{t} = \frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}$



章末問題B

であり、これが2に等しいから  $\frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)} = 2$

よって  $(1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$

$0 < s < 1, 0 < t < 1$  であるから

$$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + (1-t) \cdot 2t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

(2)  $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-t + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t} = \sqrt{2}$

2

【解答】 (1)  $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$  (2)  $\left( \frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}, \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} \right)$

(3) 4

【解説】

(1)  $\angle BOA$  の二等分線と辺  $AB$  の交点を  $C$  とすると

$$AC : CB = OA : OB = t : \sqrt{3^2 + 4^2} = t : 5$$

よって

$$\vec{OC} = \frac{5\vec{OA} + t\vec{OB}}{t+5} = \frac{1}{t+5}(5(t, 0) + t(3, 4))$$

$$= \frac{4t}{t+5}(2, 1) \dots\dots ①$$

ゆえに、求めるベクトルは

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2, 1) \text{ すなわち } \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$$

(2) ① から  $\vec{AC} = \left( \frac{8t}{t+5} - t, \frac{4t}{t+5} \right)$

$$\text{よって } AC^2 = \left( \frac{8t}{t+5} - t \right)^2 + \left( \frac{4t}{t+5} \right)^2 = \frac{(3t-t^2)^2 + 16t^2}{(t+5)^2} = \frac{t^2(t^2-6t+25)}{(t+5)^2}$$

ここで  $t^2 - 6t + 25 = (t-3)^2 + 16 > 0$

また、 $t > 0$  から  $t+5 > 0$

ゆえに  $AC = \frac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}$

$OP : PC = AO : AC$  であるから、①より

$$\vec{OP} = \frac{AO}{AO+AC} \vec{OC} = \frac{t}{t + \frac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}} \times \frac{4t}{t+5}(2, 1)$$

$$= \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}(2, 1)$$

よって、点  $P$  の座標は  $\left( \frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}, \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} \right)$

(3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{1 + \frac{5}{t} + \sqrt{1 - \frac{6}{t} + \frac{25}{t^2}}} = \frac{8}{1+1} = 4$

3

【解答】  $a_1 = 1, a_2 = -1, n \geq 3$  のとき  $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

【解説】

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  であるから

$$n(n-2)a_{n+1} = S_n \iff n(n-2)(S_{n+1} - S_n) = S_n \iff n(n-2)S_{n+1} = (n-1)^2 S_n$$

$n \geq 3$  のとき  $\frac{n}{n-1} S_{n+1} = \frac{n-1}{n-2} S_n$

よって  $\frac{n}{n-1} S_{n+1} = \frac{n-1}{n-2} S_n = \dots = \frac{3-1}{3-2} S_3$

ゆえに  $S_n = \frac{2(n-2)}{n-1} S_3 = 2 \cdot \frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}} S_3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$  であるから  $S_3 = \frac{1}{2}$

したがって  $S_n = \frac{n-2}{n-1}$

$n \geq 4$  のとき  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} - \frac{n-3}{n-2} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

すなわち  $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \dots\dots ①$

$a_1 = 1, 1 \times (-1)a_2 = a_1$  から  $a_2 = -1$

$S_3 = \frac{1}{2}$  から  $1 - 1 + a_3 = \frac{1}{2}$

ゆえに  $a_3 = \frac{1}{2}$

よって、①は  $n \geq 3$  のとき成り立つ。

以上から  $a_1 = 1, a_2 = -1,$

$$n \geq 3 \text{ のとき } a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1)  $(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q} \dots\dots ①$  とする。

このとき、 $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q} \dots\dots ②$  が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1]  $n=1$  のとき

① から  $p+\sqrt{q} = a_1 + b_1\sqrt{q}$  ゆえに  $a_1 = p, b_1 = 1$

よって、 $n=1$  のとき ② が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき、② が成り立つ、すなわち  $(p-\sqrt{q})^k = a_k - b_k\sqrt{q}$  と仮定する。

$n=k+1$  のときを考えると

$$(p-\sqrt{q})^{k+1} = (p-\sqrt{q})^k(p-\sqrt{q}) = (a_k - b_k\sqrt{q})(p-\sqrt{q})$$

$$= (pa_k + qb_k) - (a_k + pb_k)\sqrt{q} \dots\dots ③$$

ここで  $(p+\sqrt{q})^{k+1} = (p+\sqrt{q})^k(p+\sqrt{q}) = (a_k + b_k\sqrt{q})(p+\sqrt{q})$

$$= (pa_k + qb_k) + (a_k + pb_k)\sqrt{q} \dots\dots ④$$

①, ④ から  $a_{k+1} = pa_k + qb_k, b_{k+1} = a_k + pb_k$

これと ③ から  $(p-\sqrt{q})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{q}$

すなわち、 $n=k+1$  のときも ② が成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数  $n$  に対して ② が成り立つ。

(2) ①, ② から  $a_n = \frac{1}{2}[(p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n]$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{q}}[(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n]$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n}$

$$= \sqrt{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left( \frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}} \right)^n}{1 - \left( \frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}} \right)^n}$$

ここで、 $p, q$  はともに正であるから

$$-(p+\sqrt{q}) < p-\sqrt{q} < p+\sqrt{q}$$

よって  $-1 < \frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}} < 1$  したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$

【参考】  $a, b, c, d$  が有理数、 $\sqrt{q}$  が無理数のとき、

「 $a+b\sqrt{q} = c+d\sqrt{q}$  ならば  $a=c, b=d$ 」が成り立つ。

【証明】  $b \neq d$  と仮定すると、 $a+b\sqrt{q} = c+d\sqrt{q}$  から  $\sqrt{q} = \frac{c-a}{b-d}$

$a, b, c, d$  は有理数であるから、この右辺は有理数である。

ところが、左辺は無理数であり、これは矛盾である。

したがって、 $b \neq d$  とした仮定は誤りで  $b=d$

これと  $a+b\sqrt{q} = c+d\sqrt{q}$  から  $a=c$

5

【解答】 (1)  $L_m = m^2 + 2m$  (2)  $T_m = \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m + 6)$  (3) 1

【解説】

(1)  $y = (x-m)^2$

$m$  は正の整数であるから、図形  $D$  は右図の斜線部分となる。

ただし、境界線を含む。

$D$  の周上の格子点のうち、 $x$  軸上にあるものは  $(k, 0)$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ) で、 $(m+1)$  個ある。

$y$  軸上にあるものは  $(0, k)$  ( $k=0, 1, \dots, m^2$ ) で、 $(m^2+1)$  個ある。

放物線上にあるものは  $(k, (k-m)^2)$

( $k=0, 1, \dots, m$ ) で、 $(m+1)$  個ある。

よって、 $D$  の周上の格子点の数  $L_m$  は、重複に注意して

$$L_m = (m+1) + (m^2+1) + (m+1) - 3 = m^2 + 2m$$

(2)  $D$  の格子点のうち直線  $x=k$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ) 上にあるものは  $\{(k-m)^2+1\}$  個ある。

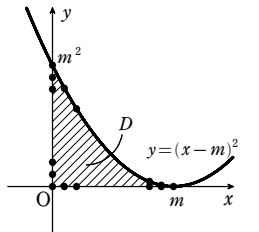
よって、 $D$  の周上および内部の格子点の数  $T_m$  は

$$T_m = \sum_{k=0}^m \{(k-m)^2+1\} = \sum_{l=0}^m (l^2+1)$$

$$= \sum_{l=1}^m l^2 + \sum_{l=0}^m 1 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m + 6)$$

(3)  $D$  の面積  $S_m$  は



$$S_m = \int_0^m (x-m)^2 dx = \left[ \frac{(x-m)^3}{3} \right]_0^m = -\frac{(-m)^3}{3} = \frac{m^3}{3}$$

よって 
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)}{\frac{m^3}{3}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)(2m^2+m+6)}{2m^3}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(2 + \frac{1}{m} + \frac{6}{m^2}\right)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

[6]

[解答] (1)  $n$  が奇数のとき  $a_n = \frac{n-1}{2}$ ,  $n$  が偶数のとき  $a_n = \frac{n-2}{2}$

(2)  $n$  が奇数のとき  $b_n = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ ,  $n$  が偶数のとき  $b_n = \frac{1}{4}(n-2)^2$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

[解説]

$k$  を自然数とする。

(1)  $n$  が奇数のとき  $n = 2k-1$  とおくと

$(2k-3, 1), (2k-5, 2), \dots, (1, k-1)$

ゆえに  $a_{2k-1} = k-1$  よって  $a_n = \frac{n-1}{2}$

$n$  が偶数のとき  $n = 2k$  とおくと

$(2k-2, 1), (2k-4, 2), \dots, (2, k-1)$

ゆえに  $a_{2k} = k-1$  よって  $a_n = \frac{n-2}{2}$

(2)  $n = 2k-1$  のとき

$$b_{2k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (a_{2i-1} + a_{2i}) = \sum_{i=1}^{k-1} 2(i-1)$$

$$= 2 \left\{ \frac{(k-1)k}{2} - (k-1) \right\} = (k-1)(k-2)$$

ゆえに  $b_n = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$

$n = 2k$  のとき

$$b_{2k} = b_{2k-1} + a_{2k-1} = (k-1)(k-2) + (k-1) = (k-1)^2$$

ゆえに  $b_n = \frac{1}{4}(n-2)^2$

(3)  $n = 2k-1$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{(2k-1)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k-2)}{(2k-1)^2}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)}{\left(2 - \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$n = 2k$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{(2k)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)^2}{(2k)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

以上から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

[7]

[解答] (1)  $\frac{5}{9}$  (2) 略 (3)  $a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$ ,  $c_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$

(4) 順に  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

[解説]

(1) さいころを 2 回振った後に動点 P が A にいるのは、2 回とも 2 以下の目が出る、

または 2 回とも 3 以上の目が出るときであるから  $a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

(2) さいころを 1 回振ると、点 A または C にいる点 P は点 B または D に移り、点 B または D にいる点 P は点 A または C に移る。よって、A または C にいる点 P は、さいころを 2 回振った後、A または C にいることが分かる。

同様に、B または D にいる点 P は、さいころを 2 回振った後、B または D にいることが分かる。

動点 P は A から出発するから、さいころを  $2n$  回すなわち偶数回振った後、A または C にいる。

(3) さいころを  $2(n+1)$  回振った後に、動点 P が A にいるのは次の場合である。

[1] さいころを  $2n$  回振った後に動点 P が点 A に移動し、その後 A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  A と移動するか A  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  A と移動する

[2] さいころを  $2n$  回振った後に動点 P が点 C に移動し、その後 C  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  A と移動するか C  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  A と移動する

以上から  $a_{n+1} = a_n \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} + c_n \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)$

すなわち  $a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{4}{9} c_n \dots\dots ①$

(2) より  $c_n = 1 - a_n \dots\dots ②$

② を ① に代入して  $a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{4}{9} (1 - a_n)$

変形すると  $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \left( a_n - \frac{1}{2} \right)$

よって、数列  $\left\{ a_n - \frac{1}{2} \right\}$  は初項  $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$ 、公比  $\frac{1}{9}$  の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \left( \frac{1}{9} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{9} \right)^n \right\}$$

これを ② に代入して  $c_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{9} \right)^n \right\}$

(4) (3) から  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$

[8]

[解答] (1)  $\theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$ , 証明は略 (2) 略 (3) 略 (4) 1

[解説]

(1)  $\theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2}$  から  $\theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left( \theta_n - \frac{\pi}{3} \right)$

よって、数列  $\left\{ \theta_n - \frac{\pi}{3} \right\}$  は初項  $\theta_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$ 、公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$\theta_n - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

また、 $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$  より、すべての自然数  $n$  に対して  $-\frac{1}{8} \leq \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{4}$  が成り立つ

から  $\frac{\pi}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \leq \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} \leq \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{8} \right) \right\}$

すなわち  $\frac{\pi}{4} \leq \theta_n \leq \frac{3}{8}\pi$

したがって、 $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つ。

(2)  $\theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2}$  から  $\cos \theta_{n+1} = \cos \left( \frac{\pi - \theta_n}{2} \right) = \sin \frac{\theta_n}{2}$

ここで、(1) の結果より、 $0 < \frac{\theta_n}{2} < \frac{\pi}{4}$  であるから  $\sin \frac{\theta_n}{2} > 0$

よって  $\cos \theta_{n+1} = \sin \frac{\theta_n}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}$

(3) すべての自然数  $n$  に対して、 $2\cos \theta_n = a_n \dots\dots ①$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1]  $n=1$  のとき

$$\left( \text{左辺} \right) = 2\cos \theta_1 = 2\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad \left( \text{右辺} \right) = a_1 = \sqrt{2}$$

よって、① が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき ① が成り立つと仮定すると  $2\cos \theta_k = a_k$

このとき、 $-1 \leq \cos \theta_k \leq 1$  より  $-2 \leq a_k \leq 2$

よって、(2) の結果より、 $n=k+1$  のとき

$$2\cos \theta_{k+1} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos \theta_k}{2}} = \sqrt{2 - 2\cos \theta_k} = \sqrt{2 - a_k},$$

$$a_{k+1} = \sqrt{2 - a_k} = \sqrt{2 - a_k}$$

ゆえに、 $n=k+1$  のときも ① は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数  $n$  に対して ① が成り立つ。

(4) (1) と (3) の結果より  $a_n = 2\cos \theta_n = 2\cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} = \frac{\pi}{3}$  で、関数  $\cos x$  は連続であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\cos \theta_n = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$$

[9]

[解答] (1)  $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{a}{2x_n}$  (2) 略 (3) 略 (4)  $\sqrt{a}$

[解説]

(1)  $f'(x) = 2x$  より、点  $(x_n, f(x_n))$  における接線の方程式は

$$y = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - a$$

ここで、 $y=0$  のとき  $x = x_{n+1}$  であるから  $2x_n x_{n+1} - x_n^2 - a = 0$

章末問題B

$x_n=0$  とすると,  $a=0$  となり,  $a>0$  に反する。

よって  $x_n \neq 0$

したがって  $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}$

(2) (1) から  $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$

すなわち  $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \dots\dots ①$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}$  と  $x_1 > \sqrt{a} > 0$  から  $x_2 > 0$

同様に繰り返して  $x_n > 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

よって, ① から  $x_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$

ここで,  $x_{n+1} - \sqrt{a} = 0$  とすると  $x_n - \sqrt{a} = 0$

繰り返して,  $x_1 - \sqrt{a} = 0$  となり, 条件に反する。

よって  $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$

また  $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{(x_n + \sqrt{a})(x_n - \sqrt{a})}{2x_n} > 0$

したがって  $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$

(3) ① から  $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$

(2) より,  $x_n > 0, 0 < \sqrt{a} < x_n$  が成り立つから  $0 < \frac{\sqrt{a}}{x_n} < 1$

よって  $0 < 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} < 1$

ゆえに  $x_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})$

(2) から  $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0, x_n - \sqrt{a} > 0$

したがって  $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|$

(4) (3) から

$$0 < |x_n - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_{n-1} - \sqrt{a}| < \left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2} - \sqrt{a}| < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}|$$

ここで  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}| = 0$

はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{a}| = 0$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

10

【解答】  $1 + \sqrt{5}$

【解説】

数列  $\{a_n\}$  が収束すると仮定して, その極限値を  $\alpha$  とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

であるから, 漸化式より  $\alpha = \sqrt{2\alpha + 4}$  ( $\alpha > 0$ )

両辺を2乗して整理すると  $\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$

$\alpha > 0$  であるから  $\alpha = 1 + \sqrt{5}$

ここで  $0 \leq |a_{n+1} - (1 + \sqrt{5})| = \frac{|\sqrt{2a_n + 4} - (1 + \sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})}$   
 $= \frac{|2a_n + 4 - (1 + \sqrt{5})^2|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})}$   
 $= \frac{2|a_n - (1 + \sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})}$

$\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5}) > 4$  であるから

$$0 \leq |a_{n+1} - (1 + \sqrt{5})| \leq \frac{2|a_n - (1 + \sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})} \leq \frac{1}{2}|a_n - (1 + \sqrt{5})|$$

よって  $0 \leq |a_n - (1 + \sqrt{5})| \leq \frac{1}{2}|a_{n-1} - (1 + \sqrt{5})| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1 - (1 + \sqrt{5})|$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1 - (1 + \sqrt{5})| = 0$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - (1 + \sqrt{5})| = 0$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  は収束し  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{5}$

11

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1)  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$  であるから

$$T_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4}$

(2)  $k \geq 2$  のとき  $k^3 - (k-1)k(k+1) = k > 0$  であるから

$$k^3 > (k-1)k(k+1)$$

よって  $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

この式に  $k=2, 3, \dots, n$  を代入して加えると

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < T_{n-1}$$

両辺に1を加えると  $S_n < 1 + T_{n-1}$

(3) (2) から  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

よって  $S \leq \frac{5}{4}$

また  $S_2 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

$S_n$  の各項は正であるから,  $n$  が十分大きいとき  $S_n \geq S_2$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq S_2 = \frac{9}{8}$  すなわち  $S \geq \frac{9}{8}$

以上から  $\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{5}{4}$

12

【解答】 (1)  $R_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$

(2)  $T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$  (3)  $\frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

【解説】

(1)  $R_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

また  $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1}$ ,

$$rS_n = r + 2r^2 + \dots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

辺々を引くと

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

よって  $S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$

(2)  $n \geq 2$  のとき

$$T_n = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2r + \dots + n(n-1)r^{n-2},$$

$$rT_n = 2 \cdot 1 \cdot r + \dots + (n-1)(n-2)r^{n-2} + n(n-1)r^{n-1}$$

$(k+1)k - k(k-1) = 2k$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) であるから, 辺々を引くと

$$(1-r)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2kr^{k-1} - n(n-1)r^{n-1}$$

$$= 2S_{n-1} - n(n-1)r^{n-1}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{1-r} \right\} - n(n-1)r^{n-1}$$

よって,  $n \geq 2$  のとき

$$T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r} \dots\dots ①$$

$T_1 = 0$  であるから, ① は  $n=1$  のときも成り立つ。

したがって  $T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$

(3) 第  $n$  項までの和を  $U_n$  とすると

$$U_n = \sum_{k=0}^n k^2 r^k = \sum_{k=0}^n \{k(k-1) + k\} r^k = r^2 \sum_{k=0}^n k(k-1)r^{k-2} + r \sum_{k=0}^n k r^{k-1} = r^2 T_n + r S_n$$

ここで,  $|r| < 1$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1)r^n = 0$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{2}{(1-r)^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (r^2 T_n + r S_n)$

$$= r^2 \cdot \frac{2}{(1-r)^3} + r \cdot \frac{1}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{2r^2 + r(1-r)}{(1-r)^3}$$

$$= \frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$$

すなわち  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

13

【解答】 (1)  $P_1(q) = q^2(3-2q)$  (2)  $P_2(q) = \frac{(2-q)q^2}{q^2-q+1}$  (3)  $0 < q \leq \frac{1}{2}$

章末問題B

【解説】

チーム A が勝つことを A, チーム B が勝つことを B で表し, 例えば, 1 回目にチーム A が勝ち, 2 回目にチーム B が勝ち, 3 回目にチーム A が勝つことを ABA で表す。

(1) チーム A が優勝するのは, AA, ABA, BAA のいずれかの場合である。

AA となる確率は  $q^2$

ABA, BAA となる確率はともに  $q^2(1-q)$

よって, チーム A が優勝する確率  $P_1(q)$  は

$$P_1(q) = q^2 + 2q^2(1-q) = q^2(3-2q)$$

(2)  $k$  を 0 以上の整数とする。

チーム A が優勝するのは, 次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1] AB が  $k$  回続いたあと, AA と続く場合

[2] 1 回目が B で, そのあと AB が  $k$  回続き, さらに AA と続く場合

[1] が起こる確率は  $\{q(1-q)\}^k q^2$

[2] が起こる確率は  $(1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$

$\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2$  は初項  $q^2$ , 公比  $q(1-q)$  の無限等比級数である。

公比について,  $q(1-q) = q - q^2 = -\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$  であり,  $0 < q < 1$  であるから

$$0 < q(1-q) \leq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

よって,  $\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2$  は収束し  $\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2 = \frac{q^2}{1-q(1-q)}$

$\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$  は初項  $(1-q)q^2$ , 公比  $q(1-q)$  の無限等比級数である。

① から,  $\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$  は収束し

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2 = \frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)}$$

チーム A が優勝する確率  $P_2(q)$  は

$$\begin{aligned} P_2(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2 \\ &= \frac{q^2}{1-q(1-q)} + \frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)} \\ &= \frac{(2-q)q^2}{q^2 - q + 1} \end{aligned}$$

(3)  $P_1(q) \geq P_2(q)$  とすると  $q^2(3-2q) \geq \frac{(2-q)q^2}{q^2 - q + 1}$

両辺を  $q^2 (>0)$  で割ると  $3-2q \geq \frac{2-q}{q^2 - q + 1}$

① より,  $q^2 - q + 1 = 1 - q(1-q) \geq \frac{3}{4}$  であるから, この不等式の両辺に  $q^2 - q + 1$  を

掛けると  $(3-2q)(q^2 - q + 1) \geq 2 - q$

左辺を展開して整理すると  $2q^3 - 5q^2 + 4q - 1 \leq 0$

すなわち  $(q-1)^2(2q-1) \leq 0$

$(q-1)^2 > 0$  であるから  $2q-1 \leq 0$  よって  $q \leq \frac{1}{2}$

ゆえに, 求める条件は  $0 < q \leq \frac{1}{2}$

14

【解答】 (1)  $\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t} a$  (2)  $S(t) = \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t} a^2$

(3)  $t=1$  のとき最小値  $\frac{\sqrt{3}}{3} a^2$

【解説】

(1)  $A_1A_2 = \frac{t}{1+t} a$ ,  $A_1C_2 = \frac{1}{1+t} a$

余弦定理により

$$\begin{aligned} A_2C_2^2 &= \left(\frac{t}{1+t} a\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t} a\right)^2 - 2\left(\frac{t}{1+t} a\right)\left(\frac{1}{1+t} a\right)\cos 60^\circ \\ &= \left(\frac{t}{1+t} a\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t} a\right)^2 - \frac{t}{(1+t)^2} a^2 \\ &= \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2} a^2 \end{aligned}$$

ゆえに  $A_2C_2 = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t} a$

(2) 正三角形  $T_1$  の面積は  $\frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

正三角形  $T_n, T_{n+1}$  は相似であり,

相似比が  $1 : \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t}$  であるから,

面積比は  $1 : \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$  となる。

また,  $0 < \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2} < 1$  から,

$S(t)$  は, 初項  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ , 公比  $\frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$  の無限等比数列の和である。

ゆえに  $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1}{1 - \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{(t+1)^2}{3t}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t} a^2$$

(3)  $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(2 + 2 + \frac{1}{t}\right)$

$t > 0$  から, 相加平均・相乗平均の関係により

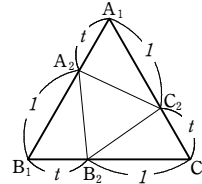
$$S(t) \geq \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(2 + 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2$$

等号は,  $t = \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$  から,  $t = 1$  のとき成り立つ。

以上から,  $t = 1$  のとき最小値  $\frac{\sqrt{3}}{3} a^2$

15

【解答】 (1)  $p_1 = \frac{1}{a+3}$ ,  $p_2 = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$



(2)  $p_n = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} + \frac{1}{a+2}$  (3)  $\frac{1}{a+2}$

【解説】

(1) はじめに袋 U の中に, 白球  $(a+2)$  個, 赤球 1 個の計  $(a+3)$  個が入っている。

よって, 1 回目に赤球を取り出す確率は  $p_1 = \frac{1}{a+3}$

次に,  $p_2$  を考える。

[1] 1 回目に白球を取り出すとき

(A) から, 操作後の袋の中に, 白球  $a$  個, 赤球 1 個の計  $(a+1)$  個が入っている。

[2] 1 回目に赤球を取り出すとき

(B) から, 操作後の袋の中に, 赤球は入っていない。

[1], [2] から, 2 回目に赤球を取り出す確率は

$$p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+3} \cdot 0 = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

(2)  $n \geq 3$  とする。3 回目以降, 袋の中に「白球  $a$  個, 赤球 1 個」または「白球  $a$  個, 赤球 0 個」が入っている。

[1]  $n$  回目に白球を取り出すとき

(A) から, 操作後の袋の中に, 白球  $a$  個, 赤球 1 個の計  $(a+1)$  個が入っている。

[2]  $n$  回目に赤球を取り出すとき

(B) から, 操作後の袋の中に, 赤球は入っていない。

[1], [2] から,  $(n+1)$  回目に赤球を取り出す確率は

$$p_{n+1} = (1-p_n) \cdot \frac{1}{a+1} + p_n \cdot 0$$

よって  $p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2}\right)$

また  $p_1 - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{(a+2)(a+3)}$

ゆえに, 数列  $\left\{p_n - \frac{1}{a+2}\right\}$  は初項  $-\frac{1}{(a+2)(a+3)}$ , 公比  $-\frac{1}{a+1}$  の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって  $p_n = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} + \frac{1}{a+2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(3)  $n=1, 2$  のとき, ① の右辺はそれぞれ

$$\frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+3},$$

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

よって, ① はすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。

ゆえに  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m p_k = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)}$

$$= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)} \left\{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}$$

$a$  は自然数より  $\left|-\frac{1}{a+1}\right| < 1$  であるから  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m = 0$

したがって  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m p_k = \frac{1}{a+2}$

[16]

【解答】 (1)  $-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$  (2)  $\frac{1}{e}-1$

【解説】

(1)  $\angle A_1OA_2 = \theta$  とおくと、

$\triangle A_k A_{k+1} A_{k+2} \sim \triangle A_{k+1} A_{k+2} A_{k+3}$  で、その相似比は  $1 : \cos \theta$

ゆえに  $A_{k+1} A_{k+2} = A_k A_{k+1} \cos \theta$

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{n}}$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

よって  $A_k A_{k+1} = A_1 A_2 (\cos \theta)^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^{k-1}$

$\vec{h}_k$  と  $\vec{h}_{k+1}$  のなす角は  $\pi - \theta$  であるから

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= |\vec{h}_k| |\vec{h}_{k+1}| \cos(\pi - \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^{k-1} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^k (-\cos \theta) \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \end{aligned}$$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = -\frac{1}{n} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^2} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 + \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{e} - 1$

[17]

【解答】 (1)  $R_6 = 1, r_6 = \frac{1}{3}$  (2)  $2\pi^2$

【解説】

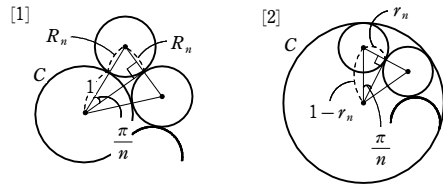


図 [1] から  $(1 + R_n) \sin \frac{\pi}{n} = R_n$  よって  $R_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$

図 [2] から  $(1 - r_n) \sin \frac{\pi}{n} = r_n$  よって  $r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$

(1)  $R_6 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, r_6 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

(2)  $\frac{\pi}{n} = \theta$  とおくと

$$\begin{aligned} R_n - r_n &= \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) - \sin \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{n} = \theta$  から  $n = \frac{\pi}{\theta}$

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $\theta \rightarrow 0$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{\theta^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= 2\pi^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1^2} = 2\pi^2 \end{aligned}$$

[1]

【解答】  $\frac{1}{8}\pi$

【解説】

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  より  $0 \leq 4nx \leq 2n\pi$

この範囲で  $\sin 4nx \geq \sin x$  を満たす条件は

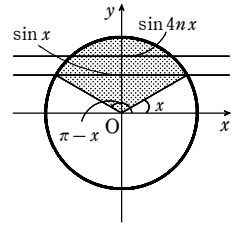
$$x + 2k\pi \leq 4nx \leq (\pi - x) + 2k\pi \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

よって  $\frac{2k\pi}{4n-1} \leq x \leq \frac{(2k+1)\pi}{4n+1}$   $(k=0, 1, \dots, n-1)$

区間の長さの総和  $S_n$  は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4n+1} - \frac{2k\pi}{4n-1} \right\} = \frac{\pi}{16n^2-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-4k+4n-1) \\ &= \frac{\pi}{16n^2-1} \left\{ -4 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} (4n-1) \right\} = \frac{\pi}{16n^2-1} \left\{ -4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + (4n-1)n \right\} \\ &= \frac{2n^2+n}{16n^2-1} \pi \end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{16 - \frac{1}{n^2}} \pi = \frac{1}{8}\pi$



[2]

【解答】 (1)  $y = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2$  (2) 4

【解説】

(1)  $y = x^2$  から  $y' = 2x$

点 A における接線と、x 軸の正の向きとのなす角を  $\theta$  とすると  $\tan \theta = 2a$

よって、 $\ell$  の傾きは

$$\begin{aligned} \tan(\theta - 30^\circ) &= \frac{\tan \theta - \tan 30^\circ}{1 + \tan \theta \tan 30^\circ} \\ &= \frac{2a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ゆえに、 $\ell$  の方程式は  $y - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)$

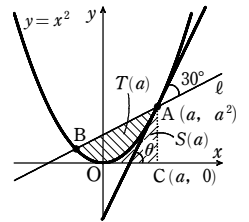
すなわち  $y = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2$

(2)  $S(a) = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$

点 B の x 座標を  $b$  とすると  $x^2 - \left\{ \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2 \right\} = (x-a)(x-b)$

よって  $a+b = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$  ゆえに  $b = -a + \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}} \dots \dots \textcircled{1}$

また  $T(a) = \int_b^a \{-(x-a)(x-b)\} dx = -\int_b^a (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{6}(a-b)^3$



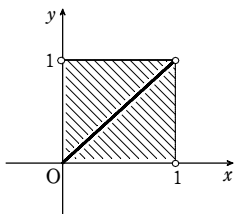
章末問題C

ゆえに、①から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(a-b)^3}{2a^3} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( -1 + \frac{2\sqrt{3}-1}{2a+\sqrt{3}} \right)^3 \right\} = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

3

【解答】 [図] 境界線上の点は、 $x$  軸、 $y$  軸と直線  $y=x$  を除き、他は含む



【解説】

$y > 0$  であるから、漸化式の両辺を  $y^{n+1}$  で割ると  $\frac{a_{n+1}}{y^{n+1}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a_n}{y^n} + 1$

$$\frac{a_n}{y^n} = b_n \text{ とおくと } b_{n+1} = \frac{x}{y} b_n + 1, b_1 = \frac{a_1}{y^1} = 0$$

$$\text{この漸化式を変形すると } b_{n+1} - \frac{y}{y-x} = \frac{x}{y} \left( b_n - \frac{y}{y-x} \right)$$

よって、数列  $\left\{ b_n - \frac{y}{y-x} \right\}$  は、初項  $b_1 - \frac{y}{y-x} = -\frac{y}{y-x}$ 、公比  $\frac{x}{y}$  の等比数列である

$$\text{から } b_n - \frac{y}{y-x} = -\frac{y}{y-x} \left( \frac{x}{y} \right)^{n-1}$$

$$\text{ゆえに } b_n = -\frac{y}{y-x} \left( \frac{x}{y} \right)^{n-1} + \frac{y}{y-x} = \frac{y}{y-x} \left[ 1 - \left( \frac{x}{y} \right)^{n-1} \right]$$

$$\text{よって } a_n = y^n b_n = \frac{y^{n+1}}{y-x} \left[ 1 - \left( \frac{x}{y} \right)^{n-1} \right] \dots \dots \textcircled{1}$$

[1]  $0 < x < y$  のとき

$$0 < \frac{x}{y} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left( \frac{x}{y} \right)^{n-1} \right] = 1$$

よって、数列  $\{a_n\}$  が有限の値に収束するための条件は、数列  $\{y^{n+1}\}$  が有限の値に収束することである。

したがって  $0 < y \leq 1$

$$0 < x < y \text{ であるから } 0 < x < y \leq 1 \dots \dots \textcircled{2}$$

[2]  $0 < y < x$  のとき

$$\textcircled{1} \text{ を変形して } a_n = \frac{x^{n-1} y^2}{y-x} \left[ \left( \frac{y}{x} \right)^{n-1} - 1 \right]$$

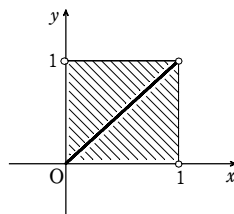
$$0 < \frac{y}{x} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{y}{x} \right)^{n-1} - 1 \right] = -1$$

よって、数列  $\{a_n\}$  が有限の値に収束するための条件は、数列  $\{x^{n-1}\}$  が有限の値に収束することである。

したがって  $0 < x \leq 1$

$$0 < y < x \text{ であるから } 0 < y < x \leq 1 \dots \dots \textcircled{3}$$

以上から、点  $(x, y)$  の存在範囲は、②、③の不等式が表す領域で、右の図の斜線部分。ただし、境界線上の点は、 $x$  軸、 $y$  軸と直線  $y=x$  を除き、他は含む。



4

【解答】 (1)  $p=2b, q=a-3b, r=-a+b$

$$(2) b=0 \text{ のとき } \sum_{k=1}^n x_k = a \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$a=0 \text{ のとき } \sum_{k=1}^n x_k = b \left( \frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$$

$$(3) \frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b$$

【解説】

$$(1) x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} \text{ から } \frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$$

両辺に  $k(k+1)(k+3)$  を掛けると

$$2ak+6b = p(k+1)(k+3) + qk(k+3) + rk(k+1)$$

$$\text{すなわち } 2ak+6b = (p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k+3p$$

$$\text{よって、} x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} \text{ がすべての自然数 } k \text{ について成り立つとき}$$

$$0 = p+q+r, 2a = 4p+3q+r, 6b = 3p$$

$$\text{ゆえに } p=2b, q=a-3b, r=-a+b$$

(2)  $b=0$  のとき、(1) から  $p=0, q=a, r=-a$

$$\text{このとき } x_k = \frac{a}{k+1} - \frac{a}{k+3} = a \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

したがって、 $n \geq 3$  のとき

$$\sum_{k=1}^n x_k = a \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= a \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right)$$

$$+ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \Big\}$$

$$= a \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= a \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \dots \dots \textcircled{1}$$

また、 $a=0$  のとき、(1) から  $p=2b, q=-3b, r=b$

このとき

$$x_k = \frac{2b}{k} - \frac{3b}{k+1} + \frac{b}{k+3} = b \left( \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= b \left( \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= 2b \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - b \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n x_k = 2b \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - b \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \dots \dots \textcircled{2}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{また、} n \geq 3 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ から } \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

ゆえに、 $n \geq 4$  のとき、②から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) - b \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= b \left( \frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \dots \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$(3) (1) \text{ から } x_k = \frac{2b}{k} + \frac{a-3b}{k+1} + \frac{-a+b}{k+3}$$

$$\text{したがって } x_k = a \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) + b \left( \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

よって、①、③から、4以上の自然数  $n$  に対して

$$\sum_{k=1}^n x_k = a \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) + b \sum_{k=1}^n \left( \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= a \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + b \left( \frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$$

$$\text{ゆえに } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b$$

5

$$\text{【解答】 (1) } \frac{1}{8} \quad (2) \frac{6}{7} S$$

【解説】

(1) 直線  $A_k A_{k+1}$  の傾きは

$$\frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

また、 $y=x^2$  から  $y'=2x$

点  $A_{k+2}$  における  $C$  の接線と直線  $A_k A_{k+1}$  が平行であるから

$$2a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

$$\text{よって } a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k) \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{A_{k+2} A_k} = (a_k - a_{k+2}, a_k^2 - a_{k+2}^2),$$

$$\overrightarrow{A_{k+2} A_{k+1}} = (a_{k+1} - a_{k+2}, a_{k+1}^2 - a_{k+2}^2)$$

から

$$T_k = \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1}^2 - a_{k+2}^2) - (a_{k+1} - a_{k+2})(a_k^2 - a_{k+2}^2)|$$

$$= \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} + a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2}) - (a_{k+1} - a_{k+2})(a_k + a_{k+2})(a_k - a_{k+2})|$$

$$= \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})(a_{k+1} + a_k)|$$

ここで、①を代入すると

$$T_k = \frac{1}{2} \left| \left( a_k - \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \right) \left( a_{k+1} - \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \right) \times (a_{k+1} - a_k) \right|$$

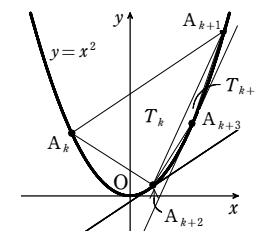
$$= \frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3$$

したがって

$$T_{k+1} = \frac{1}{8} |a_{k+2} - a_{k+1}|^3 = \frac{1}{8} \left| \frac{a_{k+1} + a_k}{2} - a_{k+1} \right|^3 = \frac{1}{64} |a_{k+1} - a_k|^3$$

$$\text{よって } \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{1}{8}$$

(2) 直線  $A_1 A_2$  の方程式は  $y = (a_1 + a_2)x - a_1 a_2$





章末問題C

同様に  $U(N) - \frac{1}{4}U(N) = \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)(n-2)}{4^n} - \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)(n-2)}{4^{n+1}}$

$$\frac{3}{4}U(N) = \sum_{n=2}^N \frac{(n-1)(n-2) - (n-2)(n-3)}{4^n} - \frac{(N-1)(N-2)}{4^{N+1}}$$

$$U(N) = \frac{4}{3} \sum_{n=2}^N \frac{2n-4}{4^n} - \frac{N^2-3N+2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} \sum_{n=2}^N \frac{n}{4^n} - \frac{16}{3} \sum_{n=2}^N \frac{1}{4^n} - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} \left[ T(N) - \frac{1}{4} \right] - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{16} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{N-1}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} T(N) - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \left(1 - \frac{1}{4^{N-1}}\right) - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

よって  $\lim_{N \rightarrow \infty} T(N) = \frac{4}{9}, \lim_{N \rightarrow \infty} U(N) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$

ゆえに  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N} p(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{T(N) + 2U(N)\} = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{27} = \frac{16}{27}$

一方  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N+1} p(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + p(2N+1) \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + \frac{2N(2N-2)}{2^{2N+3}} \right\}$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 - N}{4^N} \right\} = \frac{16}{27}$$

以上から  $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{16}{27}$

**注意** 本解答では  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^m}{a^N} = 0$  ( $a > 1, m$  は自然数) を、証明をせずに用いた。

9

**解答**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

**解説**

$x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} = \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - 1 + \frac{1}{n}\right)$  であるから、 $x = \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}$  をそれぞれ

$x^{2n} = P_n(x) \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - 1 + \frac{1}{n}\right) + a_n x + b_n$  に代入すると

$$\frac{1}{n} a_n + b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdots \textcircled{1}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n + b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdots \textcircled{2}$$

② - ① から

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{よって} \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right) a_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right]^{2n} - \frac{1}{n^{2n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = e^{-1}$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2}$

よって、① から  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{2n}} - \frac{1}{n} a_n\right) = 0$

10

**解答** (1)  $P_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$  (2)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$

**解説**

(1) 0 が 0 として伝わるのは、2n 回の伝達のうち、2k 回 ( $0 \leq k \leq n$ ) の逆転がある場合で、その確率を  $Q_{2k}$  とすると

$$Q_{2k} = {}_{2n}C_{2k} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{2n-2k} \left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$$

よって  $P_{2n} = \sum_{k=0}^n Q_{2k} = \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{2n-2k} \left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$

また、二項定理により

$$(a+b)^{2n} = a^{2n} + {}_{2n}C_1 a^{2n-1} b + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n}$$

$$(a-b)^{2n} = a^{2n} - {}_{2n}C_1 a^{2n-1} b + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n}$$

辺々を加えて

$$(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n} = 2(a^{2n} + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n})$$

すなわち  $\sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k} = \frac{1}{2}(a+b)^{2n} + \frac{1}{2}(a-b)^{2n}$

この等式を用いて

$$P_{2n} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}\right)^{2n} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{4n} \right]^{2n} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

(2)  $-\frac{1}{2n} = h$  とおくと、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $h \rightarrow -0$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{h \rightarrow -0} \left\{ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$

11

**解答** (1)  $a_n = \frac{n}{n+1}$  (2)  $B_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}, C_n = \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$

(3)  $\frac{2}{e}$

**解説**

(1)  $f_n(x) = x^{n+1}(1-x) = x^{n+1} - x^{n+2}$  から  $f'_n(x) = (n+1)x^n - (n+2)x^{n+1}$

よって、点  $(a_n, f_n(a_n))$  における接線の方程式は

$$y - (a_n)^{n+1}(1-a_n) = \{(n+1)(a_n)^n - (n+2)(a_n)^{n+1}\}(x - a_n)$$

これが原点を通るとき

$$0 - (a_n)^{n+1}(1-a_n) = \{(n+1)(a_n)^n - (n+2)(a_n)^{n+1}\}(0 - a_n)$$

ゆえに  $-(a_n)^{n+1}(1-a_n) = -(n+1)(a_n)^{n+1} + (n+2)(a_n)^{n+2}$

両辺を  $(a_n)^{n+1}$  ( $> 0$ ) で割ると  $-(1-a_n) = -(n+1) + (n+2)a_n$

よって  $(n+1)a_n = n$   $n+1 > 0$  から  $a_n = \frac{n}{n+1}$

(2)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で、 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x) \geq 0$  であるから

$$B_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (x^{n+1} - x^{n+2}) dx = \left[ \frac{1}{n+2} x^{n+2} - \frac{1}{n+3} x^{n+3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$0 < \frac{n}{n+1} < 1$  であるから  $0 < a_n < 1$

よって  $C_n = \int_0^{a_n} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{n}{n+1}} (x^{n+1} - x^{n+2}) dx = \left[ \frac{1}{n+2} x^{n+2} - \frac{1}{n+3} x^{n+3} \right]_0^{\frac{n}{n+1}}$

$$= \frac{n^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \frac{n^{n+3}}{(n+3)(n+1)^{n+3}}$$

$$= \frac{n^{n+2} \{(n+3)(n+1) - n(n+2)\}}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)} = \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)} \times (n+2)(n+3)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{2}{e}$$

12

**解答** (1)  $A_n = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$  (2)  $L_n = L + 2\pi r, S_n = A_n + Lr + \pi r^2$  (3)  $\frac{1}{4\pi}$

**解説**

(1)  $P_n$  に外接する円の中心を O とする。

$P_n$  のある 1 辺を AB とし、その中点を M とする。

$\triangle OAB$  は二等辺三角形であり、 $P_n$  は、 $\triangle OAB$  と合同な  $n$  個の二等辺三角形に分割できる。

$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$  であるから  $\angle AOM = \frac{\pi}{n}$

$AB = \frac{L}{n}$  より  $AM = \frac{L}{2n}$

よって  $OM = \frac{AM}{\tan \angle AOM} = \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}}$

ゆえに  $A_n = n \cdot \triangle OAB = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{n}{2} \cdot \frac{L}{n} \cdot \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$

(2)  $Q_n$  における  $P_n$  の各頂点付近は右の図のように

なっている。各頂点付近の斜線部分の扇形をすべて合わせると、半径  $r$  の 1 つの円となる。

よって  $L_n = L + 2\pi r$

$$S_n = A_n + r \cdot \frac{L}{n} \cdot n + \pi r^2 = A_n + Lr + \pi r^2$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}}$

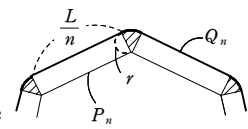
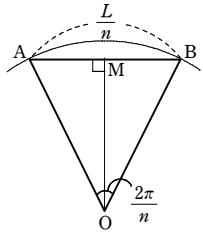
$\frac{\pi}{n} = t$  とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = \frac{L^2}{4\pi}$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{L^2}{4\pi}$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(L_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n + Lr + \pi r^2}{(L + 2\pi r)^2} = \frac{\frac{L^2}{4\pi} + Lr + \pi r^2}{(L + 2\pi r)^2}$

$$= \frac{L^2 + 4\pi Lr + 4\pi^2 r^2}{4\pi(L + 2\pi r)^2} = \frac{(L + 2\pi r)^2}{4\pi(L + 2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$$



章末問題C

13

【解答】 (1)  $a_n = 2^n - 1$  (2)  $\tan \theta_n = \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2}$  (3) 略 (4)  $\frac{1}{10}$

【解説】

(1)  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  を変形すると  $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$   
よって、数列  $\{a_n + 1\}$  は初項  $1 + 1 = 2$ 、公比  $2$  の等比数列であるから

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって  $a_n = 2^n - 1$

(2)  $\vec{p}_n = (a_n, a_{n+1})$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\alpha_n$  とおくと

$$\tan \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a_n + 1}{a_n} = 2 + \frac{1}{a_n} > 0$$

また  $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

同様に、 $\vec{p}_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2})$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\alpha_{n+1}$  とおくと

$$\tan \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}} > 0$$

また  $0 < \alpha_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

$a_{n+1} > a_n > 0$  であるから  $0 < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n}$

よって  $0 < \tan \alpha_{n+1} < \tan \alpha_n$ ,  $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

$\theta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ ,  $\theta_n \asymp \frac{\pi}{2}$  であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= \tan(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \frac{\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n+1}}{1 + \tan \alpha_n \tan \alpha_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}}{1 + \left(2 + \frac{1}{a_n}\right)\left(2 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1} + (2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)} \\ &= \frac{(2a_n + 1) - a_n}{a_n(2a_n + 1) + (4a_n + 3)(2a_n + 1)} = \frac{a_n + 1}{10a_n^2 + 11a_n + 3} \\ &= \frac{2^n}{10(2^n - 1)^2 + 11(2^n - 1) + 3} = \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} \end{aligned}$$

(3)  $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$  であるから  $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$

よって  $0 < \theta_n < \tan \theta_n$

(2) から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{2^n}}{10 - \frac{9}{2^n} + \frac{2}{2^{2n}}} = 0$

したがって、はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot 2^n \sin \theta_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot 2^n \cos \theta_n \tan \theta_n \right)$   

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot \cos \theta_n \cdot \frac{2^{2n}}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} \right)$$

14

【解答】 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{2}{\pi}$

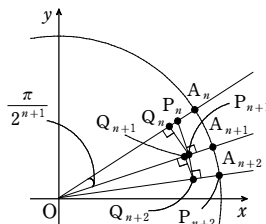
【解説】

(1)  $\angle A_n O A_{n+1} = \frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

よって  $P_{n+1} Q_n = OP_{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$   
 $= OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \dots \dots \textcircled{1}$

また  $OP_{n+1} = OP_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

ゆえに  $\frac{P_{n+2} Q_{n+1}}{P_{n+1} Q_n} = \frac{OP_{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$   
 $= \frac{OP_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$   
 $= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$



(2) (1) から  $P_{n+2} Q_{n+1} = \frac{1}{2} P_{n+1} Q_n$

ここで、右の図から  $P_2 Q_1 = \frac{1}{2}$

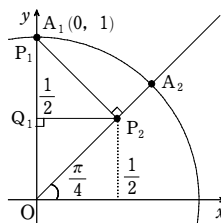
よって、数列  $\{P_{n+1} Q_n\}$  は初項  $P_2 Q_1 = \frac{1}{2}$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の

等比数列であるから  $P_{n+1} Q_n = \frac{1}{2^n}$

ここで、① から  $OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = P_{n+1} Q_n$

ゆえに  $OP_n = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n} \cos \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1}}$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} OP_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$



15

【解答】  $(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

【解説】

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot \cos \theta_n \cdot \frac{1}{10 - \frac{9}{2^n} + \frac{2}{2^{2n}}} \right) = \frac{1}{10}$$

$\triangle OP_0 P_1$  において余弦定理により

$$a_1^2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}$$

よって  $a_1 = \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)}$$

条件(A)から  $\triangle OP_{k-1} P_k \sim \triangle OP_0 P_1$  ( $2 \leq k \leq n$ )

ゆえに、 $\triangle OP_{k-1} P_k$  において  $OP_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right) OP_{k-1}$  ( $1 \leq k \leq n$ )

よって  $OP_{k-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} OP_0$

ゆえに  $a_k = \frac{OP_{k-1}}{OP_0} \times a_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} a_1$

数列  $\{a_k\}$  は初項  $a_1$ 、公比  $1 + \frac{1}{n}$  の等比数列であるから

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{n} = h$  とおくと、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $h \rightarrow 0$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h\pi}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h\pi}{h\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{1 + \cos h\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

16

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$g(x) = f(x) - x$  とおくと、 $g(x)$  は連続で  $f(x) = g(x) + x$

(1) 不等式により  $|g(x) - g(a) + x - a| \leq \frac{2}{3}|x - a|$

よって  $-\frac{2}{3}|x - a| \leq g(x) - g(a) + x - a \leq \frac{2}{3}|x - a|$

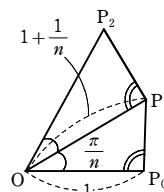
ここで  $h(x) = -\frac{2}{3}|x - a| - x + a + g(a)$

$$\leq g(x) \leq \frac{2}{3}|x - a| - x + a + g(a) = k(x)$$

のように  $h(x)$ ,  $k(x)$  を定める。

$x \rightarrow -\infty$  のとき  $-x = t$  とおくと  $t \rightarrow \infty$

このとき  $-\frac{2}{3}|x - a| - x = -\frac{2}{3}|t + a| + t = t \left( -\frac{2}{3} \left| 1 + \frac{a}{t} \right| + 1 \right) \rightarrow \infty$



章末問題C

よって,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$  であるから  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$

また,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{2}{3}|x-a| - x = x\left(\frac{2}{3}\left|1 - \frac{a}{x}\right| - 1\right) \rightarrow -\infty$

よって,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$  であるから  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

すなわち  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

ゆえに, 中間値の定理により  $g(c) = 0$  すなわち  $f(c) = c$  となる実数  $c$  が存在し, 曲線  $y = f(x)$  は直線  $y = x$  と必ず交わる。

(2)  $x_1, x_2$  を任意の実数とし,  $x_1 > x_2$  とする。

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= f(x_1) - x_1 - \{f(x_2) - x_2\} \\ &= f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2}{3}|x_1 - x_2|$  が成り立つならば

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{2}{3}(x_1 - x_2)$$

両辺から  $x_1 - x_2$  を引いて

$$f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2) \leq -\frac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

すなわち  $g(x_1) - g(x_2) \leq -\frac{1}{3}(x_1 - x_2)$

$x_1 > x_2$  より  $-\frac{1}{3}(x_1 - x_2) < 0$  であるから

$$g(x_1) - g(x_2) < 0 \quad \text{すなわち} \quad g(x_1) < g(x_2)$$

$x_2 < x_1 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1)$  であるから,  $g(x)$  は単調に減少し, (1) の交点はただ1つしかない。