

1

(解説)

$$(1) \quad z = 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1 - \cos 2\theta - i \sin 2\theta \\ = 2\sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta = 2\sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta)$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\sin \theta > 0$

また $\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$, $-\cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ)$

よって $z = 2\sin \theta \{\cos(\theta - 90^\circ) + i \sin(\theta - 90^\circ)\}$

(2) (1) から

$$z^{2001} = (2\sin \theta)^{2001} [\cos\{2001(\theta - 90^\circ)\} + i \sin\{2001(\theta - 90^\circ)\}] \\ = (2\sin \theta)^{2001} [\cos(2001\theta - 360^\circ \times 500 - 90^\circ) + i \sin(2001\theta - 360^\circ \times 500 - 90^\circ)] \\ = (2\sin \theta)^{2001} [\cos(2001\theta - 90^\circ) + i \sin(2001\theta - 90^\circ)]$$

$(2\sin \theta)^{2001} > 0$ であるから, z^{2001} が正の実数になるための条件は

$$2001\theta - 90^\circ = 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数}) \dots\dots ①$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $-90^\circ < 2001\theta - 90^\circ < 2001 \times 180^\circ - 90^\circ$

すなわち $-90^\circ < 2001\theta - 90^\circ < 1000 \times 360^\circ + 90^\circ$

$$① \text{ から } -\frac{1}{4} < n < 1000 + \frac{1}{4}$$

これを満たす整数 n は $n = 0, 1, 2, \dots, 1000$

したがって, $2001\theta - 90^\circ = 360^\circ \times n$ となる整数 n は 1001 個.

すなわち, 求める θ の値は全部で 1001 個.

2

(解説)

(1) 原点を O とする. 円の中心が原点 O であるから, 点 Q は直線 OP 上にある.

直線 OP の方程式は $bx - ay = 0 \dots\dots ①$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とすると, 2 点 A , B における接線の方程式は, それぞれ

$$x_1x + y_1y = 1, \quad x_2x + y_2y = 1$$

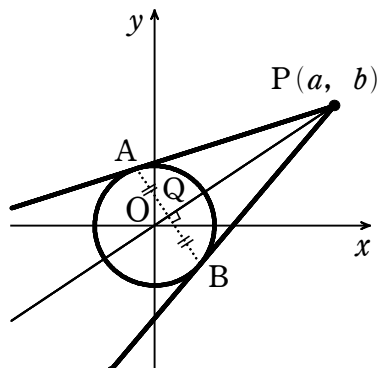
接線が, 点 $P(a, b)$ を通るから

$$x_1a + y_1b = 1, \quad x_2a + y_2b = 1$$

すなわち $ax_1 + by_1 = 1, \quad ax_2 + by_2 = 1 \dots\dots ②$

② は, 直線 $ax + by = 1$ が, 2 点 A , B を通ることを示している.

よって, 直線 AB の方程式は $ax + by = 1 \dots\dots ③$



点 Q は、2 直線 ①, ③ の交点である.

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ から } (a^2 + b^2)x = a, (a^2 + b^2)y = b$$

点 P(a, b) は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるから $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\text{ゆえに } x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{よって, 点 Q の座標は } \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

(2) 点 P は、円 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 上を動くから

$$(a-3)^2 + b^2 = 1 \dots\dots \textcircled{4}$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2} \dots\dots \textcircled{5} \text{ とおくと}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \dots\dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ から } x = a(x^2 + y^2), y = b(x^2 + y^2)$$

ここで、 $\textcircled{6}$ において、 $(a, b) \neq (0, 0)$ であるから $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\text{よって } a = \frac{x}{x^2 + y^2}, b = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\textcircled{4} \text{ に代入して } \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{6x}{x^2 + y^2} + 9 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

$$\text{よって } \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{6x}{x^2 + y^2} + 8 = 0 \quad \text{したがって } x^2 - \frac{3}{4}x + y^2 + \frac{1}{8} = 0$$

$$\text{よって } \left(x - \frac{3}{8} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{8} \right)^2$$

ゆえに、点 Q の軌跡は、中心 $\left(\frac{3}{8}, 0 \right)$ 、半径 $\frac{1}{8}$ の円

$P(t, t^3)$ とすると、点 P における接線 l の傾きは $3t^2$

$\tan \theta = 3t^2$ とおく.

$3t^2 = 1$ のとき、直線 L は y 軸に平行となり、題意を満たさない.

$3t^2 \neq 1$ のとき、直線 L の傾きは

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}$$

よって、直線 L の方程式は $y = \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3$

ゆえに、 $x^3 = \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3 \dots\dots ①$ が、異なる 3 つの実数解をもつ条件を求めればよい.

$$① \text{ から } (x - t) \left(x^2 + tx + t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} \right) = 0$$

よって、 $x^2 + tx + t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} = 0$ が t 以外の異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい.

$f(x) = x^2 + tx + t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2}$ とおく.

求める条件は $f(t) \neq 0$ かつ $f(x) = 0$ の判別式 D について $D > 0$

$$f(t) = 3t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} = -\frac{1 + 9t^4}{1 - 3t^2}$$

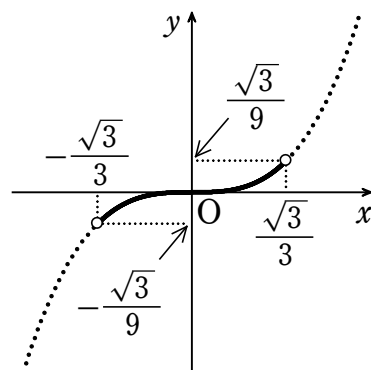
よって、 $f(t) \neq 0$ は常に成り立つ.

$$D = t^2 - 4 \left(t^2 - \frac{1 + 3t^2}{1 - 3t^2} \right) = \frac{9t^4 + 9t^2 + 4}{1 - 3t^2}$$

よって、 $D > 0$ である条件は $1 - 3t^2 > 0$

$$\text{ゆえに } -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、 P の範囲は図のようになる.



別解 $P(t, t^3)$ とすると、点 P における接線の傾きは $3t^2$

曲線 C と直線 L が相異なる 3 点で交わる条件は、 L の傾きが正となることである.

$$\text{すなわち } (-1 <)3t^2 < 1 \text{ から } -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、 P の範囲は図のようになる.

$$a_{n+k} = a_n \text{ から } i^{\frac{1}{2}(n+k)(n+k-1)} = i^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$\text{すなわち } i^{\frac{1}{2}(n+k)(n+k-1) - \frac{1}{2}n(n-1)} = 1$$

$$\text{したがって } i^{nk + \frac{1}{2}k(k-1)} = 1$$

よって、求める条件は $nk + \frac{1}{2}k(k-1)$ が任意の整数 n に対して 4 の倍数となることである。

$$n=0 \text{ のとき } nk + \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)$$

$$n=1 \text{ のとき } nk + \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}k(k+1)$$

これらがいずれも 4 の倍数となるための条件は k が 8 の倍数となることである。

逆に、 k が 8 の倍数のとき任意の整数 n に対して $nk + \frac{1}{2}k(k-1)$ は 4 の倍数となる。

よって、条件に適する k は 8 の倍数である。