

1

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする。

- (1) a^3 を a の1次式で表せ。
- (2) a は整数であることを示せ。
- (3) $b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするとき、 b を越えない最大の整数を求めよ。

2

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ を満たす実数 a, b, c に対し、 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ が成り立つことを示せ。

3

実数 α が $\alpha^3 = 5$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) α は有理数でないことを示せ。
- (2) すべての有理数 p, q に対して、 $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ であることを示せ。

4

$a+b+c=2, ab+bc+ca=3, abc=2$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a^2+b^2+c^2$ および $a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ。
- (2) 3次方程式 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ が $x=a, b, c$ を解にもつとき、定数 A, B, C の値を求めよ。
- (3) $a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ。

5

x についての n 次多項式 $f(x)$ が恒等式 $f(x^3) = x^4 f(x+1) - 15x^5 - 10x^4 + 5x^3$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(0), f(-1), f(-8)$ の値を求めよ。
- (2) n の値を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

6

3次式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りが $x+1$ で、 x^2+1 で割ったときの余りが $x-1$ であるとする。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

7

a, b, c を定数とする。 x, y, z に対して $x-2y+z=4$ および $2x+y-3z=-7$ を満たすとき、 $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ が成立する。このとき、 a, b, c の値を求めよ。

8

整式 $P(x)$ を x^2-2x+1 で割った余りが $x-2$ であり、 $2x^2+3x+1$ で割った余りが $2x+3$ である。このとき、 $P(x)$ を $2x^2-x-1$ で割った余りを求めよ。

1

【解答】 (1) $a^3 = 14 - 3a$ (2) 略 (3) 2

2

【解答】 略

3

【解答】 (1) 略 (2) 略

4

【解答】 (1) $a^2 + b^2 + c^2 = -2$, $a^3 + b^3 + c^3 = -4$ (2) $A = -2$, $B = 3$, $C = -2$
(3) 12

5

【解答】 (1) $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(-8) = 280$ (2) $n = 2$ (3) $f(x) = 5x^2 + 5x$

6

【解答】 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

7

【解答】 $a = -9$, $b = 3$, $c = 1$

8

【解答】 $-2x + 1$

1

$p = 5\sqrt{2} + 7$, $q = 5\sqrt{2} - 7$ とおくと

$$p + q = (5\sqrt{2} + 7) + (5\sqrt{2} - 7) = 10\sqrt{2},$$

$$p - q = (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) = 14,$$

$$pq = (5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7) = 1$$

(1) $a = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}$ より

$$a^3 = (\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q})^3 = p - 3\sqrt[3]{p^2q} + 3\sqrt[3]{pq^2} - q$$

$$= (p - q) - 3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q})$$

$$= 14 - 3a$$

(2) (1) から $a^3 + 3a - 14 = 0$

$$\text{よって } (a - 2)(a^2 + 2a + 7) = 0$$

$$\text{これを解くと } a = 2, -1 \pm \sqrt{6}i$$

a は実数であるから $a = 2$

したがって, a は整数である。

$$\text{【別解】 } (\sqrt{2} + 1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$$

$$(\sqrt{2} - 1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

$$\text{よって } a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3}$$

$$= (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2$$

したがって, a は整数である。

(3) $b = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ から

$$b^3 = (\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q})^3 = p + 3\sqrt[3]{p^2q} + 3\sqrt[3]{pq^2} + q$$

$$= (p + q) + 3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q})$$

$$= 10\sqrt{2} + 3b$$

$$\text{よって } b^3 - 3b - 10\sqrt{2} = 0$$

$$\text{ゆえに } (b - 2\sqrt{2})(b^2 + 2\sqrt{2}b + 5) = 0$$

$$\text{これを解くと } b = 2\sqrt{2}, -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}i$$

b は実数であるから $b = 2\sqrt{2}$

$2^2 < (2\sqrt{2})^2 < 3^2$ より, $2 < 2\sqrt{2} < 3$ であるから, b を越えない最大の整数は 2

【別解】 1 (2) より, $\sqrt[3]{p} = 2 + \sqrt[3]{q}$ であるから

$$b = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$$

$$= 2 + 2\sqrt[3]{q} = 2 + \sqrt[3]{8q} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{ここで } 8q = 8(5\sqrt{2} - 7) = 8(\sqrt{50} - 7)$$

$$49 < 50 < 50 + \frac{49}{64} = \left(7 + \frac{1}{8}\right)^2 \text{ であるから } 7 < \sqrt{50} < 7 + \frac{1}{8}$$

$$\text{よって } 0 < \sqrt{50} - 7 < \frac{1}{8}$$

$$\text{すなわち } 0 < 8q < 1$$

$$\text{ゆえに } 0 < \sqrt[3]{8q} < 1$$

① から $2 < b < 3$ したがって、 b を越えない最大の整数は 2

$$\text{[別解] } 2 \quad (\sqrt{2}+1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$$

$$(\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

$$\text{よって} \quad b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}$$

$$= (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}$$

 $2^2 < (2\sqrt{2})^2 < 3^2$ より、 $2 < 2\sqrt{2} < 3$ であるから、 b を越えない最大の整数は 2

2

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\}$$

$$= \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{18}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{18}\{(a^2-2ab+b^2) + (b^2-2bc+c^2)\} + (c^2-2ca+a^2)$$

$$= \frac{1}{18}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0$$

$$\text{よって} \quad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^2$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq 0, \quad \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq 0 \text{ であるから} \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

等号が成り立つのは $a=b=c$ のときである。

3

(1) α が有理数であると仮定すると、 $\alpha = \frac{m}{n}$ (m と n は互いに素な自然数) と表される。

$$\alpha^3 = 5 \text{ であるから} \quad \left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$$

$$\text{よって} \quad m^3 = 5n^3 \quad \dots\dots \text{①}$$

ゆえに、 m^3 は 5 の倍数であり、 m も 5 の倍数である。

$$\text{よって、} m = 5k \text{ (} k \text{ は自然数) と表され、① から} \quad (5k)^3 = 5n^3$$

$$\text{ゆえに} \quad n^3 = 5^2 k^3$$

よって、 n^3 は 5 の倍数であり、 n も 5 の倍数である。これは、 m と n が互いに素であることに矛盾する。したがって、 α は有理数でない。(2) ある有理数 p, q に対して、 $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ となると仮定する。

$$\alpha^2 = -p\alpha - q \text{ であるから}$$

$$5 = \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(-p\alpha - q) = -p\alpha^2 - q\alpha = -p(-p\alpha - q) - q\alpha$$

$$= (p^2 - q)\alpha + pq$$

$$\text{よって} \quad (p^2 - q)\alpha + pq = 5 \quad \dots\dots \text{②}$$

[1] $p^2 - q \neq 0$ のとき

$$\text{② から} \quad \alpha = \frac{5 - pq}{p^2 - q} \text{ となり、} \alpha \text{ は有理数であるが、これは (1) に矛盾する。}$$

[2] $p^2 - q = 0$ のとき

$$\text{② から} \quad pq = 5$$

$$\text{これに} q = p^2 \text{ を代入すると} \quad p^3 = 5$$

 p は有理数であるが、これは (1) に矛盾する。[1], [2] から、すべての有理数 p, q に対して、 $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ である。

4

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\text{また} \quad a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)\{a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)\} + 3abc \\ = 2 \cdot (-2 - 3) + 3 \cdot 2 = -4$$

(2) 3 次方程式の解と係数の関係により

$$a+b+c = -A, \quad ab+bc+ca = B, \quad abc = -C$$

$$\text{よって} \quad A = -(a+b+c) = -2, \quad B = ab+bc+ca = 3, \quad C = -abc = -2$$

(3) (2) より、3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ は $x = a, b, c$ を解にもつ。

$$x^5 \text{ を } x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \text{ で割ると}$$

$$x^5 = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2)(x^2 + 2x + 1) - 2x^2 + x + 2 \dots\dots ①$$

①に $x=a$, $x=b$, $x=c$ をそれぞれ代入すると

$$a^5 = -2a^2 + a + 2, \quad b^5 = -2b^2 + b + 2, \quad c^5 = -2c^2 + c + 2$$

$$\text{よって} \quad a^5 + b^5 + c^5 = (-2a^2 + a + 2) + (-2b^2 + b + 2) + (-2c^2 + c + 2)$$

$$= -2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) + 6$$

$$= -2 \cdot (-2) + 2 + 6 = 12$$

【参考】(1)の $a^3 + b^3 + c^3$ の値は, (3)と同様の方法でも求めることもできる。

$$a^3 = 2a^2 - 3a + 2, \quad b^3 = 2b^2 - 3b + 2, \quad c^3 = 2c^2 - 3c + 2$$

であるから

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a + b + c) + 3 \cdot 2 = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 + 6 = -4$$

5

(1) 等式の両辺に $x=0$ を代入して $f(0^3) = 0^4 \cdot f(1) - 15 \cdot 0^5 - 10 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3$

$$\text{よって} \quad f(0) = 0$$

同様に, 等式の両辺に $x=-1$ を代入して

$$f(-1) = 1 \cdot f(0) - 15 \cdot (-1) - 10 \cdot 1 + 5 \cdot (-1)$$

$$f(0) = 0 \text{ であるから} \quad f(-1) = 0$$

また, 等式の両辺に $x=-2$ を代入して

$$f(-8) = 16 \cdot f(-1) - 15 \cdot (-32) - 10 \cdot 16 + 5 \cdot (-8)$$

$$f(-1) = 0 \text{ であるから} \quad f(-8) = 280$$

(2) 1次以下の多項式 $f(x)$ で,

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(-8) = 280$$

を満たすものは存在しないから, $n \geq 2$ である。

$$\text{よって, 等式の右辺の次数は, } x^4 f(x+1) \text{ の次数と同じで} \quad n+4 (\geq 6)$$

$$\text{また, 等式の左辺の次数は} \quad 3n$$

$$\text{ゆえに} \quad 3n = n + 4$$

$$\text{したがって} \quad n = 2$$

(3) $f(0) = 0, f(-1) = 0$, (2)より, $f(x) = ax(x+1)$ ($a \neq 0$) とおける。

$$f(-8) = 280 \text{ から} \quad 56a = 280$$

$$\text{よって} \quad a = 5$$

$$\text{ゆえに} \quad f(x) = 5x(x+1) = 5x^2 + 5x$$

逆に, このとき,

$$(\text{左辺}) = f(x^3) = 5(x^3)^2 + 5x^3 = 5x^6 + 5x^3,$$

$$(\text{右辺}) = x^4 f(x+1) - 15x^5 - 10x^4 + 5x^3$$

$$= x^4 \{5(x+1)^2 + 5(x+1)\} - 15x^5 - 10x^4 + 5x^3$$

$$= 5x^6 + 5x^3$$

より, 与えられた恒等式の両辺は $5x^6 + 5x^3$ となり, 適する。

$$\text{したがって} \quad f(x) = 5x^2 + 5x$$

6

3次式 $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りが $x+1$ であるから, $p \neq 0$ として

$$f(x) = (px+q)(x^2+x+1) + x+1 \dots\dots ①$$

とおける。

①の右辺を変形すると

$$f(x) = (px+q)(x^2+1) + px^2 + (q+1)x + 1$$

$$= (px+q)(x^2+1) + p(x^2+1) - p + (q+1)x + 1$$

$$= (px+p+q)(x^2+1) + (q+1)x - p + 1$$

さらに, $f(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りが $x-1$ であるから

$$(q+1)x - p + 1 = x - 1$$

これが x についての恒等式であるから $q+1=1, -p+1=-1$

これを解いて $p=2, q=0$ このとき, $p \neq 0$ を満たす。

$$\text{①より} \quad f(x) = 2x(x^2+x+1) + x+1 = 2x^3 + 2x^2 + 3x+1$$

【別解】 3次式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りが $x+1$ であるから, $p \neq 0$ として

$$f(x) = (px+q)(x^2+x+1) + x+1 \dots\dots ①$$

とおける。

また, $f(x)$ を x^2+1 で割ったときの商を $g(x)$ とすると, 余りが $x-1$ であるから

$$f(x) = (x^2+1)g(x) + x-1 \dots\dots ②$$

$$x=i \text{ (} i \text{ は虚数単位) を ② に代入すると, } i^2+1=0 \text{ より} \quad f(i) = i-1 \dots\dots ③$$

①に $x=i$ を代入すると

$$f(i) = (pi+q)(i^2+i+1) + i+1 = (q+1)i - p + 1 \dots\dots ④$$

③, ④ より $i-1=(q+1)i-p+1$

すなわち $p-2-qi=0$

$p-2, -q$ は実数であるから $p-2=0, -q=0$

よって $p=2, q=0$ このとき, $p \neq 0$ を満たす。

① より $f(x)=2x(x^2+x+1)+x+1=2x^3+2x^2+3x+1$

7

$x-2y+z=4$ ……①, $2x+y-3z=-7$ ……② とする。

① $\times 3$ +② から $5x-5y=5$ すなわち $y=x-1$ ……③

①+② $\times 2$ から $5x-5z=-10$ すなわち $z=x+2$ ……④

③, ④ を $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ に代入すると

$$ax^2+2b(x-1)^2+3c(x+2)^2=18$$

x について整理すると $(a+2b+3c)x^2+(-4b+12c)x+2b+12c-18=0$

これが x についての恒等式であるから

$$a+2b+3c=0, -4b+12c=0, 2b+12c-18=0$$

これを解いて $a=-9, b=3, c=1$

8

$P(x)$ を $x^2-2x+1=(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$, $2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$ で

割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると, 条件より

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+x-2 \quad \dots\dots ①$$

$$P(x)=(x+1)(2x+1)Q_2(x)+2x+3 \quad \dots\dots ②$$

また, $P(x)$ を $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とす

ると $P(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b \quad \dots\dots ③$

① から $P(1)=-1$

② から $P\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

よって, ③ から $-1=a+b, 2=-\frac{1}{2}a+b$

これを解いて $a=-2, b=1$

よって, 求める余りは $-2x+1$